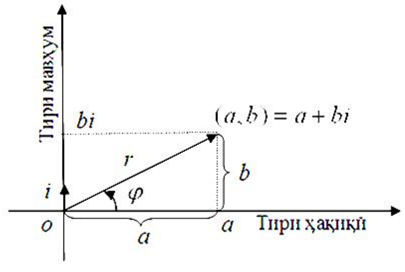
Мавзӯъи 6. Адади комплексӣ.Амалҳо бо ададҳои комплексӣ дар шакли алгебравӣ

Маълум аст, ки на ҳар як муодилаи квадратии бо коэффитсентҳои ҳақиқӣ дар соҳаи ададҳои ҳақиқӣ ҳал дорад. Масалан, ҳеҷ ягон адади ҳақиқиеро ёфтан мумкин нест, ки муодилаи $x^2+1=0$ – ро қаноат намояд. Бо мақсади ёфтани ҳалли ин қабил муодилаҳо бисёр олимони соҳаи математика дар давоми асрҳо заҳмат кашидаанд. Аз асри $ҶVI$ сар карда ифодаҳои $a+b\sqrt{-1}$ – ро тадқиқ менамуданд ва онро адади комплексӣ номиданд (ин ном то ҳол нигоҳ дошта шудааст). Лекин моҳияти аслии ин мафҳум то саршавии асри $ҶIҶ$ аниқ нашуда буд.

Асосноккунонии мантиқии системаи ададҳои комплексиро нахустин бор математики англис В. Гамилтон (1805- 1865) иҷро намудааст. Баъд аз ин қабил асосдиҳиҳои аксиоматикӣ назарияи ададҳои комплексӣ ба вуҷуд омад ва он ба ганҷинаи илми математика дохил гардид. ҳоло методи ададҳои комплексӣ дар ихтиёри математикон аслиҳаи тавоное мебошад, ки як қатор масъалаю проблемаҳои математикӣ маҳз тавассути он ҳалли худро ёфтаанд. Дар ифодаи дар боло номбаршуда $\sqrt{-1}$ – ро воҳиди мавҳум номида бо $i=\sqrt{-1}$ ишора менамоянд (i - ро воҳиди номавҳум ҳам номидан мумкин аст). Ифодаи $a+bi$ бошад, яке аз тарзҳои навишти адади комплексӣ мебошад, ки дар ин ҷо a ва b ададҳои ҳақиқӣ мебошанд. Адади a – ро қисми ҳақиқӣ ва bi – ро қисми мавҳуми адади комплексӣ меноманд. Адади комплексӣ ҳамчун нуқта (a,b) низ тавсиф мешавад. ҳар як адади комплексӣ бо вектор ҳам тасвир меёбад (ниг. ба §13).

ҳамаи инҳо – тавсифҳои гуногуни маҳз ягона мафҳуми адади комплексӣ мебошанд.

Аз нуқтаи назари геометрия адади комплексӣ $\alpha=a+bi$ нуқтаеро дар ҳамворӣ ифода менамояд (Рас. 3) :



Расми 3

Воҳиди мавҳум i дар ҳамвории комплексӣ бо нуқтаи (0; 1) тасвир мешавад.

Ду адади комплексӣ $\alpha=a+bi$ ва $\beta=c+di$ дар он ҳолат ва фақат дар он ҳолат баробаранд, агар қисмҳои ҳақиқӣ ва қисмҳои мавҳумашон мувофиқан баробар бошанд, яъне агар онҳо якчен оянд:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} .$$

Суммаи ду адади комплексӣ (α ва β) гуфта адади комплексии зеринро меноманд:

$$\alpha + \beta = (a+c) + (b+d)i .$$

ҳосили зарби ду ададҳои комплексии $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ ва $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ гуфта адади зеринро меноманд:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i .$$

(Ин қоидаи зарбро дар ёд нигоҳ доштан лозим аст). Ин ҳосили зарб $\alpha\beta$ – ро аз рӯи қоидаи зарби бисёраъзогиҳо низ ёфтан мумкин аст.

Дар асоси қоидаҳои ҷамъ ва зарби ададҳои комплексӣ қоидаи тақсими ададҳои комплексиро низ баровардан мумкин аст:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (-a_1 b_2 + a_2 b_1)i}{(a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}) + (a_2 b_2 - a_2 b_2)i} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} i = \beta .$$

Ин адади ёфташуда β ҳосили тақсими α_1 ба $\alpha_2 \neq 0$ мебошад, чунки вай баробарии $\alpha_2 \beta = \alpha_1$ – ро қаноат менамояд (инро бевосита санҷед).

Ададҳои $\alpha = a + bi$ ва $\overline{\alpha} = a - bi$ - ро ададҳои ҳамроҳшуда меноманд.

Барои ёфтани ҳосили тақсими $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ сурат ва махраҷро ба ҳамроҳшудаи махраҷ $\overline{\alpha}_2$ зарб намудан лозим аст.

Пеш аз он ки адади комплексӣ ба ягон дараҷаи натуралӣ бардошта шавад, бояд ки қиматҳои дараҷаҳои воҳиди мавҳум маълум бошанд:

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1\cdot i)\cdot(0 + 1\cdot i) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1) + (0\cdot 0 + 1\cdot 1)i = -1 ,$$

$$\begin{array}{llll}
i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, \\
i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = -1, & i^7 = -i, \\
i^8 = 1, & i^9 = i, & i^{10} = -1, & i^{11} = -i, \\
i^{12} = 1, & i^{13} = i, & i^{14} = -1, & i^{15} = -i, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
i^{4k} = 1, & i^{4k+1} = i, & i^{4k+2} = -1, & i^{4k+3} = -i, \quad k = 0,1,2,\ldots
\end{array}$$

ҳосили зарби n ададҳои комплексии ба α баробарбударо бо $\alpha^n = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{n-зарбшавандаҳо}$ ишора менамоем.

<u>Мисол</u>. 1) $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$.

2) $(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2 bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 =$

$$= a^3 + 3a^2 bi - 3ab^2 - b^3 i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2 b - b^3)i .$$

Умуман, барои ҳар як дараҷаи n – уми адади комплексӣ $(\alpha = a + bi)$ формулаи биноми Нютон татбиқшаванда аст:

$$\alpha^n = (a+bi)^n = a^n + C_n^{\,1} a^{n-1} bi + C_n^{\,2} a^{n-2} (bi)^2 + \ldots + C_n^{\,k} a^{n-k} (bi)^k + \ldots +$$
$$+ C_n^{\,n-1} a \cdot (bi)^{n-1} + (bi)^n .$$

Адади комплексии $\beta = c + di$ – ро решаи дараҷаи n – ум аз адади $\alpha = a + bi$ меноманд, агар $\beta^n = \alpha$ бошад. Масалан, $\beta = \pm(1-i)$ қиматҳои решаи квадратӣ аз адади $\alpha = -2i$ мебошад: $\beta^2 = [\pm(1-i)]^2 = (1-i)^2 = -2i$.