Мавзӯъҳои 3 ва 4. Муносибатҳои бинарӣ (n – арӣ).
Муносибатҳои квивалентӣ ва тартибӣ

Зарби декартии ду маҷмӯи ихтиёрии A ва B гуфта, маҷмӯи

$$A\times B=\{(a,\ b)/\,a\in A,\ \ b\in B\}^{*}$$

- ро меноманд (ба номи файласуф ва математики франсавӣ Р.Декарт 1596 – 1650).

Элементҳои зарби декартии $A\times B$ (маҷмӯи A ба маҷмӯи B) ҷуфтҳои намуди $(a,\,b)$ мебошанд, компонентҳои якумашон a аз элементҳои маҷмӯи A ва компонентҳои дуюмашон b бошад аз элементҳои маҷмӯи B гирифта мешаванд.

Масалан, зарби декартии маҷмӯи $A=\{1,2,3\}$ ба маҷмӯи $B=\{a,b\}$– ро чунин ҷуфтҳо ташкил медиҳанд:

$$\{(1,a);(1,b);(2,a);(2,b);(3,a);(3,b)\}.$$

Агар маҷмӯъҳои A ва B охирнок буда ва мувофиқан дорои n ва m элементҳо бошанд, он гоҳ зарби декартии онҳо аз $n\cdot m$ ҷуфтҳои гуногун иборат мебошад.

Таъриф. *ҳар як таҳтмаҷмӯи $P\subseteq A\times B$ – ро мувофиқати бинарии аз A ба B меноманд.*

Квадрати декартии маҷмӯи A ҷуфтҳоеро дар бар мегирад, ки ҳам компонентҳои якум ва ҳам компонентҳои дуюмашон маҳз аз як маҷмӯъ A гирифта мешаванд:

$$A^2=A\times A=\{(a_1,a_2)\mid a_1\in A,\quad a_2\in A\}.$$

Маълум, ки агар $(a_1,a_2)\in A\times A$ бошад, он гоҳ $(a_2,a_1)\in A\times A$ низ мебошад. Бинобар ин элементҳои маҷмӯи $A\times A$– ро ҳамчун ҷуфтҳои тартибнок дида баромадан лозим аст.

Маҷмӯъҳои $A^3,A^4,...,A^к$ – ро дараҷаҳои декартии маҷмӯи A меноманд, ки элементҳои онҳо 3 - тогиҳо , 4 – тогиҳо ва ҳоказо $к$ - тогиҳо тартибнок мебошанд. Агар A маҷмӯи охирноки дорои n элементҳо бошад, он гоҳ дараҷаи $к$ – уми декартии он $A^к$ дорои $n^к$ элементҳо мебошад. Масалан, квадрат ва куби декартии маҷмӯи $A=\{5,7\}$ маҷмӯъҳои

$$A^2=\{(5,5);(5,7);(7,5);(7,7);\}$$

$$A^3=A^2\times A=\{(5,5,5);(5,5,7);(5,7,5);(5,7,7);(7,5,5);(7,5,7);(7,7,5);(7,7,7);\}$$

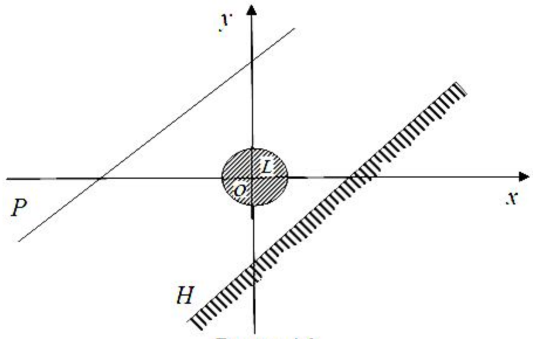
мебошанд, ки онҳо мувофиқан дорои $2^2=4$ ва $2^3=8$ элементҳо мебошанд. Айнан ҳамин тавр ҳамаи чортогиҳои тартибнокро аз элементҳои ҳамон маҷмӯи додашуда $A=\{5,7\}$, ки шумораашон ба $2^4=16$ баробар аст, тартиб диҳед.

Муносибати бинарии дар маҷмӯи A додашуда гуфта ҳар як тахтмаҷмӯи $P \subseteq A \times A = A^2$ квадрати декартии маҷмӯи A –ро меноманд.

Муносибати бинарӣ ҳолати хусусии мувофиқати бинарӣ мебошад, яъне мувофиқатест, ки дар он маҷмӯи $A \times A$ равонашавӣ ва ҳам маҷмӯи воридшавӣ маҳз маҷмӯи A мебошад. Масалан, муносибатҳои зерин муносибатҳои бинарии дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ D додашуда мебошанд:

$$P = \{(x, y) \mid y = x + 3\} \subset D \times D,$$
$$H = \{(x, y) \mid x - y \geq 2\} \subset D \times D,$$
$$L = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset D \times D.$$

Тасвири геометрии ин муносибатҳои бинарии P, H ва L мувофиқан маҷмӯи нуқтаҳои хати рост, нимҳамворӣ ва доираи воҳидӣ мебошад (Рас. 16).



Расми 16

Квадрати декартии маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ $D \times D = D^2$ ҳамаи нуқтаҳои ҳамвориро мувофиқат менамояд. Аз ин ҷост, ки D^2 – ро муносибати бинарии пурраи дар маҷмӯи D додашуда меноманд.

ҳар як муносибати бинарӣ бо ягон шарт ё комплекси шартҳое муайян карда мешавад. Агар $(x, y) \in P$ бошад, он гоҳ мегӯянд, ки ҷ бо y дар муносибати P мебошанд ва инро чунин ҳам менависанд: xPy. Масалан, $x = 3$ ва $y = 2$ дар муносибати ">" мебошанд, лекин онҳо дар муносибати "⁝" намебошанд. Ифодаи xPy – ро таносубӣ меноманд. Таносубӣ ин – навишти ошкоро ва аёнии муносибати бинарӣ мебошад. Агар ҷ ва y дар муносибати P набошанд, он гоҳ онро бо $x\overline{P}y$ (ё бо $(x, y) \notin P$) ишора менамоянд. Масалан, агар A маҷмӯи ҳамаи секунҷаҳо дар ягон ҳамворӣ ва $P \subseteq A^2$ муносибати «монандӣ» бошанд, он гоҳ ҳар як секунҷаи баробартараф бо дигар секунҷаи баробартараф дар ин муносибат P мебошанд, лекин он секунҷа бо секунҷаи росткунҷа дар муносибати P нест.

Дар навишти $(x, y) \in P$ дар зери P ишораи тахтмаҷмӯъ $P \subseteq A^2$ ва дар навишти xPy бошад, дар зери P ишораи муносибати бинарӣ фаҳмида мешавад: ҳам таҳтмаҷмӯи ҷуфтҳо ва ҳам муносибати бинарии ба он таҳтмаҷмӯъ мансуббуда бо як ҳарф P ишора мегардад. Бо ду ё якчанд муносибатҳои бинарӣ, ки таҳтмаҷмӯъҳои $A \times A$ мебошанд, амалҳоро ҳамчун бо маҷмӯъҳо иҷро намудан мумкин аст.

Муносибати эквивалентӣ E яке аз хосиятҳои хусусии муносибати бинарӣ мебошад, ки шартҳои зеринро қаноат менамояд:

1. Шарти ниҳодӣ: ҳар як элементи ихтиёрии $x \in A$ худаш ба худаш дар муносибати E бошад, яъне xEx.
2. Шарти симметрӣ: агар xEy бошад, он гоҳ маълум гардад, ки yEx мебошад ва баръакс: $xEy \Leftrightarrow yEx$.
3. Шарти ҳалқаваслшавӣ: аз xEy ва yEz маълум мегардад, ки xEz мебошад.

Масалан, муносибатҳои бинарӣ, монандӣ, конгруэнтии фигураҳо ва монанди инҳо мисоли муносибатҳои эквивалентӣ мебошанд. Дар протсесси омӯзиши минбаъдаи математика мо ба бисёр мисолҳои дигари муносибати эквивалентӣ вомехӯрем.

Муносибатҳои бинарие ҳам ҳастанд, ки муносибати эквивалентӣ нестанд. Масалан, муносибати тақсимшавӣ дар маҷмӯи ададҳои натуралӣ муносибати эквивалентӣ нест (шарти симметрӣ иҷро намегардад). Ду элементи дар муносибати E бударо элементҳои бо ҳам эквивалентбуда номида ва бо $x \sim y$ ишора менамоянд. Яъне, бо ҳам муносибати xEy – ро бо $x \sim y$ иваз намудан мумкин аст. Минбаъд мо ҳам дар бисёр мавридҳо аз ин навишт истифода мекунем.

Маҷмӯи A ва муносибати эквивалентии дар он додашударо бо $< A, \sim >$ ишора менамоем. ҳар як муносибати эквивалентии дар маҷмӯи A додашудаи он маҷмӯъ $A-$ ро ба синфҳои эквивалентнокӣ (таҳтмаҷмӯъҳои буриданашаванда) ҷудо менамояд.

Дар баробари муносибати эквивалентӣ боз навъи дигари муносибати

бинарӣ – тартиб низ мавҷуд аст, ки вай барои математика ва татбиқи он хело ҳам муфид аст.

Муносибати бинарӣ дар маҷмӯи A додашуда муносибати тартиб T номида мешавад, агар шартҳои зеринро қаноат намояд:

(1). Шарти ниҳодӣ: xTx барои ҳар як $x \in A$.

(2). Шарти ғайрисимметрӣ: таносубҳои xTy ва yTx фақат дар ҳолати $x = y$ будан дар як вақт ҷой дошта тавонанд.

(3). Шарти ҳалқаваслшавӣ: аз xTy ва yTz маълум гардад, ки xTz аст.

(4). Шарти дихотомӣ (аз ду ҳолат яке): барои ду элементҳои дилхоҳ $x, y \in A$ ё xTy ва ё ин ки yTx бошад.

Масалан, муносибати «хурд ва баробар» дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ D ва муносибати каратнокӣ дар маҷмӯи ададҳои бутун Z муносибатҳои тартиб мебошанд:

$$R = \{(x,\ y) \mid x \le y\} \subset D^2, \qquad P = \{(x,\ y) \mid x \vdots y\} \subset Z^2$$

(бо $x \vdots y$ каратнок будани x ба y ишора шудааст). Барои муносибати P шарти дихотомӣ иҷро намегардад. Ин қабил тартибро, ки фақат шартҳои (1), (2) ва (3) – ро қаноат менамоянд тартиби номукаммал меноманд. Масалан, муносибати «хурд ва баробар» $Қ$ тартиби мукаммал мебошад.

Маҷмӯеро, ки дар он муносибати тартиб дода шудааст, маҷмӯи тартибнок меноманд. Масалан, маҷмӯи D аз рӯи муносибати $"\le"$ маҷмӯи мукаммал тартибнок мебошад.

Маҷмӯе, ки дар он тартиби номукаммал дода шудааст, маҷмӯи номукаммал тартибнок номида мешавад. Маҷмӯи Z аз рӯи муносибати P номукаммал тартибнок мебошад. Элементҳои дар муносибати тартиб T бударо муқоисашаванда меноманд. Ин муқоисашавандагӣ xTy – ро дар шакли $x \prec y$ менависанд (аломати $"\le"$ – ро ба хотир меоварад). Агар дар тартиб баробарии элементҳо ба назар гирифта нашавад, он гоҳ ин тавр тартибро қатъӣ меноманд:

($1'$) ғайриниҳодӣ: барои ҳар як элемент $x \in A$ таносубии $x \prec x$ нодуруст бошад.

($2'$) ғайрисимметрӣ: агар $x \prec y$ ҷой дошта бошад, он гоҳ $y \prec x$ ҷой надошта бошад ва баръакс.

($3'$) ҳалқаваслшавӣ: аз $x \prec y$ ва $y \prec z$ маълум мегардад, ки $x \prec z$.

($4'$) трихотомӣ (аз се фақат яке): барои ҳар як ду элементҳо $x,\ y \in A$ яке аз ҳолатҳои зерин ҳатман иҷро гардад: $x \prec y$ ё $y \prec z$ ва ё $y = x$.