Лексия 16. Масъала дар бораи траекторияи ортогналӣ

Хати каҷи $y = y(x)$ траекторияи ортогналии маҷмуи хатҳои каҷи

$$F(\xi, \eta, C) = 0 \tag{1}$$

(ξ, η – координатаҳо, C – параметр) номида мешавад, агар дар ҳар як нуқтаи $M(x, y)$-и ин хати каҷ таҳти кунҷи рост якчанд маҷмӯи хатҳо гузарад (расми 15).

Муодилаи маҷмӯи хатҳои каҷ (1)-ро дар намуди дифференсиалӣ навиштан қуллай аст. Барои ин муодилаи (1)-ро дифференсиронида ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0 \tag{2}$$

Аз муодилаи (1) ва (2) параметри C-ро хориҷ намуда, муодилаи дифференсиалии намуди

$$\Phi(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}) = 0 \tag{3}$$

ҳосил мекунем, ки ихтиерӣ хати каҷи маҷмӯи додашудаи (1)-ро қаноат мекунад.

Бигзор аз нуқтаи $M(x, y)$ -и траекторияи ортогналӣ яке аз маҷмӯи хатҳои каҷи (1) гузарад. Аен аст, ки дар ин нуқта баробарии

$$\xi = x, \qquad \eta = y$$

ҷой дорад. Ғайр аз ин мувофиқи шарти перпендикулярии расандаҳо

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{4}$$

мешавад. Баробарии (4)-ро дар (3) гузошта муодилаи дифференсиалии

$$\Phi\Big(x, y, -\frac{1}{y'}\Big) \quad \Big(y' = \frac{dy}{dx}\Big) \tag{5}$$

ҳосил мекунем, ки координатаҳои нуқта ва равиши траекторияи ортогналиро қаноат мекунад. Муодилаи (5)-ро интегронида маҷмӯи ҳамаи траекторияи ортогналиро меёбем.

Қайд. Муодилаи дифференсиалии хатҳои каҷи (3)-ро дар намуди муқарарии

$$\Phi\Big(x, y, y'\Big) = 0 \tag{6}$$

навишта мо дар асоси формулаи (5) чунин қоидаи оддии зеринро соҳиб мешавем:

Барои он ки муодилаи дифференсиалии траекторияи ортогналии маҷмӯи додашударо ҳосил кунем, зарур аст, ки дар муодилаи дифференсиалии маҷмӯи хатҳои каҷ y' -ро ба $-\frac{1}{y'}$ иваз намоем.

Мисол. Траекторияи ортогналии маҷмӯи эллипс ёфта шавад (расми 16).

$$x^2 + 2y^2 = C \tag{7}$$

Ҳал. Муодилаи (7)-ро дифференсиронида, ҳосил мекунем:

$$2x + 4yy' = 0$$

Аз ин ҷо

$$2yy' + x = 0 \tag{8}$$

Муодилаи (8) муодилаи дифференсиалии маҷмӯи эллипсҳои (7) мебошад. Мувофиқи қайд дар муодилаи (8) y' -ро ба $-\frac{1}{y'}$ иваз намуда, муодилаи дифференсиалии траекторияи ортогналиро ҳосил мекунем:

$$-\frac{2y}{y'} + x = 0 \quad \text{ё} \quad y' = \frac{2y}{x} \tag{9}$$

Муодилаи охиринро интегронида, маҷмӯи траекторияи ортогналии

$$y = Cx^2$$

-ро ҳосил мекунем, ки маҷмӯи параболаҳоро ифода мекунад (расми 16).

расми 15 *расми 16*

Мисолҳо барои кори мустақилона

Ҳалли махсуси муодилаҳои дифференсиалӣ ёфта шавад.

16.1. $2y(y'+2) - x(y')^2 = 0$. 16.2. $y = x + y' - lny'$.

16.3. $(y'+1)^3=27(x+y)^2$.

16.4. $y'^2=4y^3(1-y)$. 16.5. $y'^3+y^2=yy'(y'+1)$.

16.6. $(y')^2(2-3y)^2=4(1-y)$.

16.7. $3y=2xy'-\frac{2}{x}(y')^2$.

16.8. Барои кадом қимати параметри a муодилаи $y'=\sqrt[3]{y^2}-a$ ҳалли махсус дорад.

16.9. Хати каҷеро ёбед, ки аз нуқтаи (0;1) гузараду зеррасандаи доимиро дорад.

16.10. Траекторияи ортогналии оилаи гиперболаи

$$xy=C$$

ёфта шавад.