## Лексия 14. Муодилаи Риккати

Муодилаи дифференсиалии тартиби якуми намуди

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0, \tag{1}$$

ки дар ин ҷо $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ - функсияҳои маълум мебошанд, муодилаи Риккати номида мешавад. Агар коэффисиентҳои $P$, $Q$, $R$ дар муодилаи Риккати доимӣ бошанд, он гоҳ (1) муодилаи тағйиребандаҳояш ҷудошаванда мебошад, ки интеграли умумии он намуди зеринро дорад.

$$C_1 - x = \int \frac{dy}{Py^2 + Qy + R}.$$

Чи хеле, ки Лиувилл нишон додааст, муодилаи (1) дар ҳолати умумӣ ба квадратура оварда намешавад. Он фақат дар мавридҳои ҷудогона дар квадратура ҳал мешавад.

### Хосиятҳои муодилаи Риккати

$1^0$. *Агар ягон ҳалли хусусии $y_1(x)$ -и муодилаи (1) маълум бошад, он гоҳ ҳалли умумии онро ба воситаи квадратура ёфтан мумкин аст.*

Дар ҳақиқат, агар дар муодилаи (1) гузориши

$$y = y_1(x) + z(x) \tag{2}$$

ки дар ин ҷо $z(x)$ -функсияи номаълуми нав мебошад, иҷро кунем, он гоҳ муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + P(x)\left(y_1^2 + 2y_1z + z^2\right) + Q(x)(y_1 + z) + R(x) = 0 \tag{3}$$

Азбаски $y_1(x)$ ҳалли хусусии муодилаи (1) мебошад, пас

$$\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1^2 + Q(x)y_1^2 + R(x) \equiv 0$$

ва бинобар ин муодилаи (3) чунин намуд пайдо мекунад:

$$\frac{dz}{dx} + P(x)\left(2y_1z + z^2\right) + Q(x)z = 0,$$

ё

$$\frac{dz}{dx} + P(x)z^2 + \left(2a(x)y_1 + b(x)\right)z = 0. \tag{4}$$

Муодилаи (4) ҳолати хусусии муодилаи Бернулли мебошад.

**Мисоли 1.** Муодилаи Риккати

$$y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x$$

ҳал карда шавад, агар ҳалли хусусии $y_1 = e^x$-и он маълум бошад.

**Ҳал.** Дар муодила гузориши $y = e^x + z(x)$ -ро иҷро карда ҳосил мекунем

$$e^x + \frac{dz}{dx} - e^{2x} - 2ze^{2x} - z^2 + 2e^{2x} + 2ze^x = e^{2x} + e^x$$

ё

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

Интегронии ин муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда ба баробарии зерин меоварад:

$$-\frac{1}{z} = x - C$$

ё

$$z = \frac{1}{C - x}$$

Ҳамин тариқ, ҳалли умумии муодилаи додашуда чунин аст:

$$y = e^x + \frac{1}{C - x}$$

**Қайд:** *Ба ҷойи гузориши (2) гузориши*

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

*-ро, ки ин ҷо $u(x)$ функсияи номаълуми нав мебошад, истифода бурдан мумкин аст, ки он якбора муодилаи (1) -ро ба муодилаи хаттии*

$$u' - (2Py_1 + Q)u = P$$

*табдил медиҳад .*

$2^0$. *Агар ду ҳалли хусусии муодилаи (1) маълум бошанд, он гоҳ ҳалли умумии он бо як квадратура ёфта мешавад.*

Бигузор ду ҳалли хусусии $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ -и муодилаи (1) маълум бошад. Айнияти

$$\frac{dy_1}{dx} \equiv -P(x)y_1^2 - Q(x)y_1 - R(x)$$

-ро истифода бурда, муодилаи (1) -ро дар намуди

$$\frac{1}{y-y_1}\frac{d(y-y_1)}{dx}=-P(x)(y+y_1)-Q(x)$$

ё

$$\frac{d}{dx}\Big[ln(y-y_1)\Big]=-P(x)(y+y_1)-Q(x) \quad (5)$$

менависем.

Барои ҳалли хусусии $y_2(x)$ айнан ба монанди ҳалли хусусии $y_1(x)$ рафтор намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{d}{dx}\Big[lny-y_2\Big]=-P(x)(y+y_2)-Q(x) \quad (6)$$

Аз баробарии (5), баробарии (6)-ро тарҳ намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{d}{dx}\Big[ln\frac{y-y_1}{y-y_2}\Big]=P(x)(y_2-y_1)$$

Аз ин ҷо

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=Ce^{\int P(x)\Big[y_2(x)-y_1(x)\Big]dx} \quad (7)$$

**Мисоли 2.** Муодилаи

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m^2}{x^4}-y^2, \quad m=const$$

ҳалли хусусии

$$y_1=\frac{1}{x}+\frac{m}{x^2}, \quad y_2=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}$$

-ро дорад. Ҳалли умумии муодила ёфта шавад.

**Ҳал.** Формулаи (7)-ро истифода бурда, интеграли умумии муодилаи додашударо ҳосил мекунем

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=Ce^{-\int\frac{2m}{x^2}dx}, \quad \text{аз ин ҷо} \quad \frac{x^2y-x-m}{x^2y-x+m}=Ce^{\frac{2m}{x}}.$$

**Мисолҳо барои кори мустақилона**

Муодилаҳое, ки ҳалли хусусиашон дода шудааст, ҳал карда шаванд.

14.1. $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}, \quad y_1=e^x.$

14.2. $y' + y^2 - 2ysinx + sin^2x - cosx = 0, \quad y_1 = sinx, \quad y_2 = sinx + \frac{1}{x}$.

14.3. $xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x, \quad y_1 = x$.

14.4. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1, \quad y_1 = -\frac{1}{x}$.

14.5. $y' - 2y^2 + 4e^xy = e^{3x} + e^{2x}, \quad y_1 = e^x$.

14.6. $y' - 2y^2 + ye^{2x} = xe^{2x} - 1, \quad y_1 = sine^x$.