Лексия 13. Муодилаи Лагранж ва Клеро

Намуди умумии муодилаи Лагранж чунин аст:

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0 \tag{1}$$

Барои интегронии муодилаи Лагранж онро дар намуди нисбат ба y ҳалшуда навиштан қуллай мебошад.

$$y = f(y')x + \varphi(y') \tag{2}$$

Ёфтани ҳалли умумии муодилаи (2) дар шакли параметрӣ ба интегронии як муодилаи хаттӣ оварда мешавад.

y' -ро ҳамчун параметр қабул карда бо p ишора мекунем; $y' = p$. Он гоҳ

$$y = xf(p) + \varphi(p) \tag{3}$$

Дар баробарии $dy = y'dx$ y'-ро бо p ва dy-ро бо ифодаи он аз (3) иваз намуда ҳосил мекунем:

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + \varphi'(p)dp \tag{4}$$

Муодилаи (4) муодилаи дифференсиалии хаттӣ нисбат ба x мебошад. Агар $x = F(p, C)$ ҳалли умумии муодилаи (4) бошад, он гоҳ ҳалли умумии муодилаи Лагранж чунин намуд дорад:

$$\begin{cases} x = F(p, C), \\ \\ y = F(p, C)f(p) + \varphi(p). \end{cases}$$

Муодилаи Клеро гуфта муодилаи намуди

$$y = xy' + \varphi(y')$$

меноманд, ки он ҳолати хусусии муодилаи Лагранж мебошад.

Муодилаи Клеро бо методи барои муодилаи Лагранж татбиқшуда интегронида мешавад. Ҳалли умумии муодилаи Клеро намуди

$$y = Cx + \varphi(C)$$

-ро дорад, ки он дар ҳамворӣ оилаи хатҳои ростро ифода мекунад.

Муодилаи Клеро ғайр аз ҳалли умумӣ боз ҳалли махсус дорад, ки муодилаҳои параметрии он дар шакли параметрӣ ин тавр навишта мешавад:

$$
\begin{cases}
x = -\varphi'(p), \\
\\
y = -p\varphi'(p) + \varphi(p).
\end{cases}
$$

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед.

$$y = xy'^2 + y'^2$$

Ҳал. Муодилаи додашуда муодилаи Лагранж мебошад. $y' = p$ -ро ҳамчун параметр интихоб мекунем. Он гоҳ

$$y = xp^2 + p^2$$

Аз ин баробари dy -ро ёфта онро ба ифодаи $dy = pdx$ баробар мекунем:

$$pdx = p^2dx + 2pxdp + 2pdp.$$

Ҳар ду тарафи ин муодиларо ба p тақсим намуда муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошавандаро ҳосил мекунем:

$$(1 - p)dx = 2(x + 1)dp$$

ё

$$\frac{dx}{x + 1} = \frac{2dp}{1 - p}$$

Аз ин ҷо

$$ln|x + 1| = -2ln|1 - p| + ln|C|$$

ё

$$x + 1 = \frac{C}{(p - 1)^2}.$$

Муодилаи $y = xp^2 + p^2 = p^2(x + 1)$ -ро истифода бурда ҳосил мекунем:

$$y = \frac{Cp^2}{(1 - p)^2}$$

Амали ба p тақсим намудани муодила ба гум шудани ҳалли муодила оварда метавонад. Дар муодилаи додашуда низ ин ҳолат ҷой дорад. Бинобар ин $p = 0$ -ро ба муодилаи (5) гузошта $y = 0$-ро ҳосил мекунем, ки он ҳалли муодилаи додашуда мебошад. Нишон додан душвор нест, ки $y = 0$ ҳалли махсуси мебошад.

Ҳамин тариқ, ҳалли умумии муодилаи додашуда

$$\begin{cases} x+1=\frac{C}{(p-1)^2} \\ \\ y=\frac{Cp^2}{(p-1)^2} \end{cases}$$

буда, $y=0$ - ҳалли махсуси он мебошад.

Қайд мекунем, ки бо усули баёншуда баъзан муодилаҳои намудашон умумитар $y=f(x,y')$ ва $x=f(y,y')$-ро интегронидан муяссар мешавад.

Мисолҳо барои кори мустақилона

Муодилаҳои додашуда интегронидашаванд.

13.1. $y=xy'+\sqrt{b^2+a^2y'^2}$. 13.2. $y=xy'-y'^2$. 13.2a. $y=xy'+y'-y'^2$.

13.3. $y=2xy-4y'^2$. 13.4. $y+xy'=4\sqrt{y'}$. 13.5. $2y(y'+1)=xy'^2$.

13.6. $y=x(\frac{1}{x}+y')+y'$. 13.7. $y=\frac{3}{2}xy'+e^{y'}$. 13.8. $y=2xy'+lny'$.

13.9. $y=xy'+a\sqrt{1+(y')^2}$. 13.10. $x=\frac{y}{y'}+\frac{1}{(y')^2}$. 13.11. $xy'(y'+2)=y$.

13.12. $2xy'-y=lny'$. 13.13. $y=xy'^2-2y'^3$. 13.14. $y=2xy'+sin^2y'$.

13.15. $6xy'^2-6yy'-3y'^3=2$. 13.16. $y=xy'+cosy'$. 13.17. $y=xy'+y'^2$.