Лексия 12. Муодилаи намуди $x = \varphi(y')$ ва $y = \varphi(y')$

Ин муодилаҳо ба осонӣ дар намуди параметрӣ интегронида мешаванд. Дар ҳақиқат агар дар муодилаи $x = \varphi(y')$, $y' = p$ (p – параметр) гузорем, он гоҳ тағйирёбандаи x якбора ҳамчун функсияи параметри p ифода меёбад

$$x = \varphi(p) \tag{1}$$

Аз ҳар ду тарафи баробарии (1)-ро дифференсиал мегирем

$$dx = \varphi'(p)dp.$$

Илова бар ин

$$dy = y'dx = pdx.$$

Бинобар ин

$$dy = p\varphi'(p)dp. \tag{2}$$

Муодилаи (2)-ро интегронида, ҳосил мекунем:

$$y = \int p\varphi'(p)dp + C$$

Ҳамин тариқ, ҳалли умумии муодилаи $x = \varphi(y')$ дар намуди параметрӣ чунин намуд дорад:

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ \\ y = \int p\varphi'(p)dp + C \end{cases}$$

Ба монанди ин барои интегронии муодилаи $y = \varphi(y')$ параметри $y' = p$-ро дохил намуда y-ро ҳамчун функсияи p ифода мекунем

$$y = \varphi(p)$$

Аз ин ҷо

$$dy = \varphi'(p)dp$$

ва азбаски $dy = pdx$, пас баробарии

$$pdx = \varphi'(p)dp$$

-ро ҳосил мекунем.

Аз ин ҷо

$$dx = \frac{\varphi'(p)dp}{p}$$

Баробарии охиринро интегронида x -ро низ ҳамчун функсияи параметри p ифода мекунем

$$x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} + C$$

Ҳамин тавр ҳалли умумии муодилаи $y = \varphi(y')$ чунин аст

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(p)dp}{p} + C \\ \\ y = \varphi(p) \end{cases}$$

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед.

$$x = siny' + lny'$$

Ҳал. Агар $y' = p$ - ро ҳамчун параметр интихоб кунем, пас x якбора ба воситаи p ифода меёбад

$$x = sinp + lnp.$$

Аз ин ҷо

$$dx = cospdp + \frac{1}{p}dp.$$

Илова бар ин $dy = pdx$ ё $dx = \frac{dy}{p}$ мебошад.
Пас

$$\frac{dy}{p} = cospdp + \frac{1}{p}dp$$

ё

$$dy = (pcosp + 1)dp$$

Баробарии охиринро интегронида ҳосил мекунем

$$y = psinp + cosp + p + C.$$

Ҳамин тариқ ҳалли умумии муодилаи додашуда чунин аст:

$$\begin{cases} x = sinp + lnp \\ \\ y = psinp + cosp + p + C \end{cases}$$

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед.

$$y = y'^2 + 2lny'$$

Ҳал. $y' = p$ - гузошта, y -ро ҳамчун функсияи p ифода мекунем

$$y = p^2 + 2lnp$$

Аз ин ҷо

$$dy = 2pdp + \frac{2}{p}dp$$

Бо баробарии $dy = y'dx = pdx$ муқоиса карда, ҳосил мекунем

$$pdx = 2pdp + \frac{2}{p}dp$$

ё

$$dx = (2 + \frac{2}{p^2})dp.$$

Интеграл гирифта x -ро низ чун функсияи p ифода мекунем

$$x = 2p - \frac{2}{p} + C.$$

Ҳалли умумии муодилаи додашуда чунин аст:

$$\begin{cases} y = p^2 + 2lnp \\ \\ x = 2p - \frac{2}{p} + C. \end{cases}$$

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед.

$$y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$$

Ҳал. Параметри p -ро ин тавр дохил мекунем: $y = cos^3 t$. Он гоҳ аз муодила меёбем

$$(y')^{2/3} = 1 - y^{2/3} = 1 - (cos^3 t)^{2/3} = 1 - cos^2 t = sin^2 t.$$

Аз ин ҷо

$$y' = sin^3 t$$

Ин ифодаҳои y ва y' -ро дар баробарии

$$dx = \frac{dy}{y'}$$

мегузорем

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-3cos^2tsintdt}{sin^3t} = -3\frac{cos^2t}{sin^2t}dt$$

Аз ин ҷо

$$x = \int(-3\frac{cos^2t}{sin^2t})dt = \int\frac{3sin^2t-3}{sin^2t}dt = \int(3-\frac{3}{sin^2t})dt = 3t+3ctgt+C.$$

Ҳалли умумии муодилаи додашуда чунин аст:

$$\begin{cases} x = 3t+3ctgt+C, \\ \\ y = cos^3t. \end{cases}$$

Мисолҳо барои кори мустақилона

Муодилаҳоро ҳал кунед.

12.1. $y = (y')^2e^{y'}$. 12.2. $x = 2y'+3y'^2$. 12.3. $y = y'lny'$. 12.4. $x = y'^3+y'$

12.5. $y' = e^{xy'/y}$. 12.6. $y^{2/5}+(y')^{2/5} = a^{2/5}$. 12.7. $y(y-2xy')^3 = y'^2$.

12.8. $x = e^{2y'}(2y'^2+2y'+1)$. 12.9. $y'^2-y'^3 = y^2$. 12.10. $5y+y'^2 = x(x+y)$.

12.11. $y(1+y'^2)^{1/2} = y'$. 12.12. $x = 2(lny'-y')$. 12.13. $y'^4-y'^2 = y^2$.

12.14. $arcsin(\frac{x}{y'}) = y'$. 12.15. $y = arcsiny'+ln\Big(1+(y')^2\Big)$.
12.16. $x = (y')^2-2y'+2$.

12.17. $(y')^2-yy'+e^x = 0$. 12.18. $(y')^2-4xy+2y+2x^2 = 0$.
12.19. $4(y')^2-9x = 0$.