Лексия 11. Муодилаҳои дифференсиалии тартиби якуми нисбат ба ҳосила ҳалнашуда.

1. Мафҳумҳои умумӣ оид ба муодилаҳои дифференсиалии тартиби якуми нисбат ба ҳосила ҳалнашуда.

Агар муодилаи

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

бо усули алгебравӣ нисбат ба тағйирёбандаи y' яккимата ҳал нашавад, пас (1)-ро муодилаи тартиби якуми нисбат ба ҳосила ҳалнашуда меноманд.

Масалан муодилаҳои

$$y' siny' - x = 0 \quad \text{ва} \quad y'^2 - 1 = 0$$

нисбат ба ҳосила ҳалнашаванда мебошанд. Якумаш умуман нисбат ба таг -йирёбандаи y' ҳал намешавад. Он нисбат ба y' муодилаи трансендентӣ мебошад. Дуюмаш нисбат ба y' ду реша дорад.

$$y' = -1, \quad y' = 1$$

Масъалаи Коши барои муодилаи нисбат ба ҳосила ҳалнашуда ҳамчун барои муодилаи

$$y' = f(x, y)$$

ин тавр гузошта мешавад:

Чунин ҳалли $y = f(x, y)$-и муодилаи (1) ёфта шавад, ки он шарти ибтидоии

$$y(x_0) = y_0$$

-ро қаноат кунонад. Геометрӣ ин масъала ёфтани ҳалли аз нуқтаи додашудаи x_0, y_0 гузаранда мебошад.

Хосияти ягонагии ҳалли масъалаи Коши барои муодилаи нисбат ба y' ҳалнашаванда ин тавр фаҳмида мешавад:

а) агар аз нуқтаи (x_0, y_0) якчанд ҳалҳои муодилаи (1) гузаранд ва дар нуқтаи x_0, y_0 ҳамаи хатҳои каҷи интегралии мувофиқ расандаҳои гуногун дошта бошанд, пас мегӯянд, ки масъалаи Коши дар нуқтаи x_0, y_0 ҳалли ягона дорад.

б) агар аз нуқтаи (x_0, y_0) ду ва ёзиёдтар ҳалҳои муодилаи (1) гузашта аққалан ду хатҳои каҷи интегралӣ дар нуқтаи x_0, y_0 расандаи умумӣ дошта бошанд, пас мегӯянд, ки хосияти ягонагии ҳалли масъалаи Коши дар нуқтаи (x_0, y_0) вайрон мешавад.

Ҳалли муодилаи тартиби якуми нисбат ба ҳосила ҳалнашуда дар се намуд ёфта мешавад:

1) шакли ошкор, 2) шакли ноошкор, 3) шакли параметрӣ

Бо ду шакли ҳал мо дар параграфҳои пешина шинос шуда будем. Шакли параметрии ҳалро муайян мекунем.

Функсияи

$$x = x(t), \quad y = y(t) \;\; t_1 \le t \le t_2$$

ҳалли муодилаи (1) номида мешавад, агар функсияҳои $x(t)$, $y(t)$ дар порчаи $[t_1, t_2]$ дифференсиронидашаванда бошад, $x'(t) \neq 0$ бошад ва дар тамоми нуқтаҳои номбаршуддаи порчаи $[t_1, t_2]$ айнияти зерин иҷро шавад:

$$F\Big(x(t), y(t), \frac{y'(t)}{x'(t)}\Big) \equiv 0$$

Масалан, функсияи дар шакли параметрӣ додашудаи $x = sint$, $y = cost$ барои ҳамаи қиматҳои $t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$ ҳалли муодилаи дифференсиалии зерин мебошад.

$$y\sqrt{1 + y'^2} - 1 = 0$$

Муодилаи тартиби якуми нисбат ба ҳосила ҳалнашуда ҳалҳои махсус низ дошта метавонад. Агар дар ҳамаи нуқтаҳои ягон ҳалли муодилаи (1) хосияти ягонагӣ вайрон шавад, пас ин ҳалро ҳалли махсус меноманд.

Ду усули ҷустуҷӯи ҳалли махсуси муодилаи (1)-ро баён мекунем.

I. Бигзор функсияи $F(x, y, y')$ нисбат ба ҳамаи тағйиёбандаҳояш бефосила буда нисбат ба y' ҳосилаи хусусии бефосиларо дошта бошад. Он гоҳ чунин қоидаи ёфтани ҳалли махсус мавҷуд аст:

1) аз системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

тағйирёбандаи p -ро хориҷ карда муносибати намуди

$$\Psi(x, y) = 0 \tag{3}$$

-ро ҳосил мекунем, ки он хати каҷи p - дискриминантӣ номида мешавад;

2) тафтиш кардан лозим аст, ки ягон шохаи хати (3) ҳалли муодиларо муайян мекунад;

3) тафтиш кардан лозим аст, ки дар ҳамаи нуқтаҳои ин ҳал хосияти ягонагӣ ҷой надорад. Он гоҳ ҳалли ёфташуда махсус мебошад.

II. Усули дуюм донистани интеграли умумии муодиларо талаб мекунад.

Бигзор муносибати

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{4}$$

интеграли умумии муодилаи (1) бошад. Геометрӣ (4) оилаи хатҳои каҷи аз як параметри C вобаста мебошад.

Аз системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} \Phi(x, y,) = 0, \\ \\ \Phi'(x, y,) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

параметри C- ро хориҷ карда муносибати зеринро ҳосил мекунанд

$$\Psi(x, y) = 0, \tag{6}$$

ки он хати каҷи C- дискриминантӣ номида мешавад.

Аз таҳлили математикӣ маълум аст, ки шохаи $y = \varphi(x)$-и хати каҷи C-дискриминантӣ иҳотагири оилаи хатҳои (4) мебошад, агар

$$\Phi'_x(x, \varphi(x), C) \neq 0 \ \text{ ва } \ \Phi'_y(x, \varphi(x), C) \neq 0$$

бошанд. Аҷн аст, ки иҳотагири $y = \varphi(x)$-и оилаи хатҳои каҷи (4) ҳалли махсус мешавад.

2. Муодилаи дифференсиалии тартиби якуми дараҷаи n -уми нисбати y'.

Муодилаи дифференсиалии намуди

$$(y')^n + P_1(x, y)(y')^{n-1} + ... + P_{n-1}(x, y)y' + P_n(x, y) = 0 \tag{1}$$

-ро дида мебароем. (1) нисбат ба тағйирёбандаи y' муодилаи алгебравии дараҷаи n мебошад. Бигзор ин муодила k -то $(k \leq n)$ решаҳои ҳақиқӣ дошта бошад.

$$y' = f_1(x, y), \ y' = f_2(x, y), ..., y' = f_k(x, y) \tag{2}$$

Ҳамин тавр муодилаи (1) ба k -то муодилаҳои нисбат ба ҳосила ҳалшудаи (2) ҷудо мешавад.

Он гоҳ интеграли (ҳалли) умумии муодилаи (1) гуфта ҷамъбасти муносибатҳои

$$\Phi_1(x, y, C) = 0, \quad \Phi_2(x, y, C) = 0, ..., \Phi_k(x, y, C) = 0,$$

-ро меноманд, ки дар ин ҷо $\Phi_i(x, y, C) = 0$ интеграли умумии муодилаи $y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, ..., k)$ мебошад. Ҳамин тариқ , аз ҳар як нуқтаи соҳаи мавҷудият ва ягонагии муодилаҳои (2) k -то хати каҷи интегралӣ мегузаранд. Ғайр аз ин муодила ҳалҳои махсусро низ дошта метавонад.

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед.

$$y(y')^2 + (x - y)y' - x = 0$$

Ҳал. Муодилаи додашударо нисбати y' ҳал мекунем.

$$y' = \frac{y - x \pm \sqrt{(x - y)^2 + 4xy}}{2y}$$

$$y' = 1, \quad y' = -\frac{x}{y}$$

Ҳамин тавр муодилаи додашуда ба ду муодилаи нисбат ба y' ҳалшуда ҷудо шуд. Ҷамъбасти ҳалҳои умумии онҳо

$$y = x + C, \qquad y^2 + x^2 = C^2$$

ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Мисоли 2. Интеграли умумӣ ва махсусӣ муодиларо ёбед.

$$y'^2 - \frac{2y}{x}y' + 1 = 0$$

Ҳал. Муодилаи додашуда нисбати y' муодилаи квадратӣ мебошад. Решаҳои ин муодиларо меёбем.

$$D = \frac{4y^2}{x^2} - 4 = \frac{4y^2 - 4x^2}{x^2} = \frac{4}{x^2}(y^2 - x^2)$$

$$y' = \frac{\frac{2y}{x} - \frac{2}{x}\sqrt{y^2 - x^2}}{2} = \frac{1}{x}\left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right), \tag{3}$$

$$y' = \frac{\frac{2y}{x} + \frac{2}{x}\sqrt{y^2 - x^2}}{2} = \frac{1}{x}\left(y + \sqrt{y^2 - x^2}\right).$$

Муодилаи додашуда боз ба ду муодилаи нисбат ба y' ҳалшуда ҷудо шуд. Муодилаи якумро ҳал мекунем

$$y' = \frac{1}{x}\left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right)$$

$$xdy = \left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right)dx$$

Ин муодилаи якҷинсаро бо гузориши $y = ux$ ҳал мекунем

$$x(xdu + udx) = (ux - \sqrt{u^2x^2 - x^2})dx$$

Тағйирёбандаҳоро ҷудо карда, интеграл мегирем

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + lnx = lnC$$

$$x(u + \sqrt{u^2 - 1}) = C$$

Ба ҷои u қимати он $\frac{y}{x}$-ро гузошта баъди соддакунӣ ҳосил мекунем

$$x^2 + C^2 = 2cy \tag{4}$$

Худи ҳамин тавр муодилаи дуюми (3)-ро интегронида боз ба муносибати (4) меоем, яъне (4) интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Барои ёфтани интеграли махсус дар асоси қоидаи ҷустуҷӯи ҳалли махсус аз системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} x^2 + C^2 - 2Cy = 0, \\ \\ 2C - 2y = 0 \end{cases}$$

параметри C -ро хориҷ мекунем

$$C = y \quad x^2 + y^2 - 2y^2 = 0,$$

ё

$$x^2 - y^2 = 0$$

Аз ин ҷо мебарояд, ки хатҳои рости $y = \pm x$ хатҳои C-дискриминантии муодилаи додашуда мебошанд.

Азбаски ҳангоми $x \neq 0$, $C \neq 0$ барои функсияи ихтиёрии у, аз ҷумла функсияҳои $y = \pm x$

$$\Phi'_x(x, y, C) = (x^2 + C^2 - 2Cy)'_x = 2x \neq 0 \text{ ва } \Phi'_y(x, y, , C) = -2C \neq 0,$$

пас хатҳои рости $y = \pm x$ иҳотагири оилаи параболаҳои (4) мебошанд ва аз ин ҷост, ки функсияҳои $y = \pm x$ ҳалҳои махсуси муодилаи додашуда мебошанд.

Мисолҳо барои кори мустақилона

Муодилаҳоро ҳал кунед.

11.1. $y = (y')^2 e^{y'}$. 11.2. $x = 2y' + 3y'^2$. 11.3. $y = y' ln y'$. 11.4. $x = y'^3 + y'$

11.5. $y' = e^{xy'/y}$. 11.6. $y^{2/5} + (y')^{2/5} = a^{2/5}$. 11.7. $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

11.8. $x = e^{2y'}(2y'^2 + 2y' + 1)$. 11.9. $y'^2 - y'^3 = y^2$. 11.10. $5y + y'^2 = x(x + y)$.

11.11. $y(1 + y'^2)^{1/2} = y'$. 11.12. $x = 2(ln y' - y')$. 11.13. $y'^4 - y'^2 = y^2$.

11.14. $arcsin(\frac{x}{y'}) = y'$. 11.15. $y = arcsin y' + ln\Big(1 + (y')^2\Big)$. 11.16. $x = (y')^2 - 2y' + 2$.