Лексия 10. Зарбкунандаи интегронӣ

Дар баъзе ҳолатҳо, агар муодилаи

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

дар дифференсиалҳои пурра набошад, чунин функсияи $\mu = \mu(x,y)$ -ро ҷустуҷӯ мекунанд, ки ҳангоми зарб кардани муодилаи (1) ба ин функсия қисми чапи он дифференсиали пурраи ягон функсияи $u(x,y)$ мешавад:

$$du = \mu M dx + \mu N dy$$

Чунин финксия $\mu(x,y)$ -ро зарбкунандаи интегронӣ меноманд.

Мувофиқи таърифи зарбкунандаи интегронӣ айнияти зерин ҷой дорад.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

ё

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

Аз ин ҷо

$$(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})\mu = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \tag{2}$$

Муодилаи (2) муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ мебошад, ки дар он μ функсияи номаълум аст. Дар мавриди умумӣ интегронии ин муодила хеле мураккаб аст.

Якчанд ҳолатҳои хусусиро дида мебароем, ки ҳалли муодилаи (2), яъне зарбкунандаи интегронӣ ба осони ёфта мешавад.

Ҳолати якум. Фарз мекунем, ки муодилаи (1) зарбкунандаи интегроние дорад, ки вай фақат функсияи тағйиребандаи x мебошад. Дар ин ҳолат $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ва $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$. Он гоҳ муодилаи (2) намуди зерин мегирад:

$$(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})\mu = N\frac{d\mu}{dx}$$

Аз ин ҷо

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{3}$$

мешавад. Дар ин муодила қисми чап функсияи x аст. Пас қисми росташ низ бояд функсияи фақат x бошад. Ҳамин тариқ, барои он, ки муодилаи (1) зарбкунандаи интегронии намуди $\mu = \mu(x)$ дошта бошад, зарур аст, ки

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x), \tag{4}$$

яъне тарафи чапи (4) бояд функсияи фақат тағйирёбандаи x бошад.

Дар ин маврид аз муодилаи (3) зарбкунандаи интегронӣ ба осонӣ ёфта мешавад.

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx} \tag{4'}$$

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед.

$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0$$

Ҳал. Дар ин муодила $M = x + y^2, \ N = -2xy$

Ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial M}{\partial y}$ ва $\frac{\partial N}{\partial x}$ -ро ҳисоб мекунем.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y,$$

яъне

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Бинобар ин барои муодилаи додашуда зарбкунандаи интегрониро ҷустуҷӯ мекунем. Иҷрошавии шарти (4)-ро месанҷем

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}$$

яъне зарбкунандаи инетегронии намуди $\mu = \mu(x)$ мавҷуд аст. Бо формулаи $(4')$ меёбем

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}}dx = e^{-2lnx} = \frac{1}{x^2}$$

Акнун муодилаи додашударо ба функсияи $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ зарб мекунем

$$\frac{x + y^2}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0.$$

Муодилаи додашуда дар дифференсиали пурра мебошад. Қисми чапи муодиларо дар намуди зерин менависем:

$$\frac{dx}{x}-\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=0$$

ё

$$d\Big(ln|x|-\frac{y^2}{x}\Big)=0$$

Аз ин ҷо мебарояд, ки интеграли умумии муодилаи додашуда чунин аст:

$$x=Ce^{y^2/x}$$

Ҳолати дуюм.

Фарз мекунем, ки муодилаи (1) зарбкунандаи интегроние дорад, ки вай фақат функсияи тағйирёбандаи y мебошад, яъне $\mu=\mu(y)$. Дар ин ҳолат $\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dy}$ ва $\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$. Он гоҳ муодилаи (2) намуди зеринро мегирад:

$$(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu=-M\frac{d\mu}{dy}$$

ё

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}. \tag{5}$$

мешавад. Дар ин муодила қисми чап функсияи y мебошад. Бинобар ин қисми рости он бояд фақат аз y вобаста бошад. Ҳамин тариқ барои он ки муодилаи (1) зарбкунандаи интегронии намуди $\mu=\mu(y)$ дошта бошад, зарур аст, ки

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(y), \tag{6}$$

яъне ифодаи тарафи чапи (6) бояд функсияи y бошад. Дар ин маврид аз муодилаи (5) ҳосил мекунем

$$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy} \tag{7}$$

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед.

$$y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$$

Ҳал. Дар ин муодила

$$M(x,y)=y(x+y),\quad N(x,y)=xy+1$$

мебошад.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x+2y,\quad \frac{\partial N}{\partial y}=y$$

ва

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial y}.$$

яъне муодилаи додашуда дар дифференсиалҳои пурра нест.

Зарбкунандаи интегронии намуди $\mu = \mu(y)$ -ро ҷустуҷӯ мекунем. Азбаски

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{x+2y-y}{-y(x+y)} = \frac{1}{y},$$

пас чунин зарбкунандаи интегронӣ мавҷуд аст. Мувофиқи формулаи (7) меёбем.

$$\mu(y) = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{-lny} = \frac{1}{y}$$

Акнун муодилаи додашударо ба $\mu(y) = \frac{1}{y}$ зарб карда, ҳосил мекунем:

$$(x+y)dx + \frac{xy+1}{y}dy = 0 \tag{8}$$

Дар ин муодила

$$\mu M = x+y, \quad \mu N = \frac{xy+1}{y} = x + \frac{1}{y}$$

мебошанд. Ҳосилаҳои хусусии $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}$ ва $\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ ба ҳамдигар баробаранд:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Пас муодилаи (8) дар дифференсиалҳои пурра мебошад:

Интеграли умумии ин муодиларо меёбем.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M = x+y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{1}{y}$$

Муодилаи якумро нисбат ба x интегронида ҳосил мекунем

$$u(x,y) = \int (x+y)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y) \tag{9}$$

Аз ин ҷо нисбат ба y ҳосила мегирем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y)$$

Ифодаи ёфташудаи $\frac{\partial u}{\partial y}$ -ро бо ифодаи аввалааш муқоиса карда меёбем

$$x + \varphi'(y) = x + \frac{1}{y}$$

ё

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y}$$

Аз ин ҷо

$$\varphi(y) = ln|y| \quad (C = 0)$$

Ин ифодаи $\varphi(y)$ -ро ба формулаи (9) гузошта ҳосил мекунем

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + ln|y|$$

Аз ин ҷост, ки интеграли умумии муодила чунин аст:

$$\frac{x^2}{2} + xy + ln|y| = C.$$

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед

$$(2x^2y^2 + y)dx + (x^3y - x)dy = 0$$

Ҳал. Ҳар ду тарафи муодиларо ба y^2 $(y \neq 0)$ тақсим карда онро дар шакли зерин менависем:

$$2x^2dx + \frac{y}{y^2}dx - \frac{x}{y^2}dy + \frac{x^3y}{y^2}dy = 0,$$

ё

$$2x^2dx + \frac{ydx - xdy}{y^2} + \frac{x^3}{y}dy = 0$$

ва ниҳоят

$$2x^2dx + d(\frac{x}{y}) + x^2\frac{x}{y}dy = 0$$

Гузориши $\frac{x}{y} = t$ истифода мебарем. Азбаски $dy = \frac{tdx - xdt}{t^2}$ пас баъди гузориш муодилаи зерин ҳосил мешавад:

$$2x^2dx + dt + x^2t\frac{tdx - xdt}{t^2} = 0$$

Аз ин ҷо

$$2x^2tdx + tdt + x^2tdx - x^3dt = 0$$

ё

$$3x^2tdx + (t - x^3)dt = 0 \tag{10}$$

Дар ин муодила

$$M = 3x^2t, \quad N = t - x^3.$$

Ҳосилаҳои хусусӣ

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 3x^2 \ \text{ ва } \quad \frac{\partial N}{\partial y} = -3x^2$$

яъне муодила дар дифференсиалҳои пурра нест. Азбаски

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{3x^2 + 3x^2}{-3x^2t} = -\frac{2}{t} = \varphi(t),$$

пас зарбкунандаи интегронии намуди $\mu = \mu(t)$ мавҷуд аст ва дар асоси формулаи (7) онро меёбем

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{2}{t}dt} = e^{-2lnt} = \frac{1}{t^2}.$$

Акнун муодилаи (10)-ро ба функсияи $\mu(t) = \frac{1}{t^2}$ зарб мекунем

$$\frac{3x^2}{t}dx + (\frac{1}{t} - \frac{x^3}{t^2})dt = 0 \tag{11}$$

Дар ин ҷо

$$M = \frac{3x^2}{t^2}, \quad N = \frac{1}{t} - \frac{x^3}{t^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{3x^2}{t^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{3x^2}{t^2}$$

Пас муодилаи (11) дар дифференсиали пурра мебошад. Бинобар ин функсияи $u(x,t)$ мавҷуд аст, ки барои он

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2}{t}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{t} - \frac{x^3}{3}$$

пас аз баробарии якум нисбат ба x интеграл гирифта ҳосил мекунем:

$$u(x,t) = \int \frac{3x^2}{t}dx + \varphi(t) = \frac{x^3}{t} + \varphi(t).$$

Аз функсияи ёфташуда нисбат ба t ҳосила мегирем.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x^3}{t^2} + \varphi'(t)$$

Азбаски баробарии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{t} - \frac{x^3}{t^2}$$

низ бояд иҷро шавад, пас

$$\frac{1}{t} - \frac{x^3}{t^2} = -\frac{x^3}{t^2} + \varphi'(t).$$

Аз ин ҷо

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}$$

ва

$$\varphi(t) = ln|t|$$

Ин ифодаи $\varphi(t)$- ро ба формулаи (12) гузошта ҳосил мекунем.

$$u(x,t) = \frac{x^3}{t} + ln|t|$$

ё

$$u(x,y) = \frac{x^3}{\frac{x}{y}} + ln|\frac{x}{y}|$$

$$u(x,y) = x^2y + ln|\frac{x}{y}|$$

Ҳамин тариқ, интеграли умумии муодилаи додашуда чунин мешавад:

$$x^2y + ln|\frac{x}{y}| = C$$

Мисолҳо барои кори мустақилона

Муодилаҳоро ҳал кунед.

10.1. $(x^2+3lny)ydx = xdy$. 10.2. $(xcosy-ysiny)dy+(xsiny+ycosy)dx = 0$.

10.3. $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy = 0$. 10.4. $(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy = 0$.

10.5. $(x^4lnx-2xy^3)dx+3x^2y^2dy = 0$. 10.6. $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy = 0$.

10.7. $x(lny+2lnx-1)dy = 2ydx$. 10.8. $(x^2+1)(2xdx+cosydy) = 2xsinydx$.

10.9. $(x + sinx + siny)dx + cosydy = 0$. 10.10. $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$.