Лексия 9. Муодилаҳо дар дифференсиалҳои пурра.

Муодилаи намуди

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

дар дифференсиалҳои пурра номида мешавад, агар қисми чапи ин муодила дифференсиали пурраи ягон функсияи $u(x,y)$ бошад, яъне

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Теорема. Барои он ки муодилаи (1) дар дифференсиали пурра бошад, зарур ва кифоя аст, ки дар соҳаи D айнияти

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{2}$$

ҷой дошта бошад.

Ҳалли умумии муодилаи (1) намуди $u(x,y) = C$ ё

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C \tag{3}$$

-ро дорад.

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед.

$$(2x-y)dx - (x-2y)dy = 0$$

Ҳал. Дар ин ҷо $M = 2x - y, \quad N = -(x-2y)$

Азбаски $\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$

пас шарти дар дифференсиалҳои пурра будани муодила иҷро мешавад.

Ҳамин тариқ тарафи чапи муодилаи додашуда дифференсиали пурраи ягон функсияи $u(x,y)$ мебошад, яъне

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - y, \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y} = -(x-2y) \tag{$*$}$$

Ин функсияро меёбем.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ -ро нисбат ба x интегронида, ҳосил мекунем

$$u = \int (2x-y)dx + \varphi(y) = x^2 - xy + \varphi(y)$$

Функсияи ёфташудаи u барои ихтиёрӣ функсияи дифференсиронидашавадаи $\varphi(y)$ баробарии якуми $(*)$ -ро қаноат мекунонад. $\varphi(y)$ -ро тавре интихоб мекунем, ки функсияи u баробарии дуюми $(*)$ -ро низ қаноат кунонад. Барои ин аз ифодаи функсияи u нисбат ба y ҳосила мегирем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + \varphi'(y)$$

ва бо баробарии дуюми $(*)$ муқоиса карда ҳосил мекунем

$$\varphi'(y) = 2y$$

Аз ин ҷо

$$\varphi(y) = y^2$$

Ҳамин тариқ интеграли умумии муодилаи додашуда чунин мешавад:

$$x^2 - xy + y^2 = C$$

Мисоли 2. Санҷед, ки муодилаи додашуда дар дифференсиалҳои пурра мебошад ва онро ҳал кунед.

$$2x(1+\sqrt{x^2-y})dx - \sqrt{x^2-y}dy = 0$$

Ҳал. Дар ин муодила $M = 2x + 2x\sqrt{x^2-y}$ ва $N = -\sqrt{x^2-y}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}$$

Шарти дар дифференсиалҳои пурра будани муодила, яъне

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

иҷро мешавад. Пас тарафи чапи муодилаи додашуда дифференсиали пурраи ягон функсияи $u(x,y)$ мебошад. Ин функсияро меёбем.

Дорем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2x\sqrt{x^2-y}.$$

Аз ин ҷо

$$u = \int (2x + 2x\sqrt{x^2-y})dx + \varphi(y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2-y)\sqrt{x^2-y} + \varphi(y),$$

ки дар ин ҷо $\varphi(y)$ функсияи ихтиёрии дифференсиронидашавандаи y мебошад.

Баробарии охиринро нисбати y дифференсиронида ҳосил мекунем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \Big[x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} + \varphi(y)\Big]'_y = -\sqrt{x^2 - y} + \varphi'(y)$$

$$-\sqrt{x^2 - y} + \varphi'(y) = N$$

$$-\sqrt{x^2 - y} + \varphi'(y) = -\sqrt{x^2 - y}$$

$$\varphi'(y) = 0 \quad \text{ё ин ки} \quad \varphi(y) = C$$

Ҳалли умумии муодилаи додашуда чунин аст:

$$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)\sqrt{x^2 - y} = C$$

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед

$$3x^2(1 + lny)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$$

Ҳал.

$$(3x^2 + 3x^2lny)dx - (2y - \frac{x^3}{y})dy = 0$$

$$M = 3x^2 + 3x^2lny, \qquad N = -(2y - \frac{x^3}{y})$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{3x^2}{y}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}$$

Шарти дар дифференсиали пурра будани муодила иҷро мешавад.

Минбаъд чун дар мисолҳои 2 ва 3 амал мекунем.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3x^2lny$$

Аз ин ҷо

$$u = \int (3x^2 + 3x^2lny)dx + \varphi(y) = x^3 + x^3lny + \varphi(y) \qquad (**)$$

u -ро нисбат ба y дифференсиронида, ҳосил мекунем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3}{y} + \varphi'(y)$$

$$\frac{x^3}{y} + \varphi'(y) = -2y + \frac{x^3}{y}$$

$$\varphi'(y) = -2y$$

Аз ин ҷо

$$varphi(y) = -y^2$$

Ин ифодаи $\varphi(y)$ -ро ба баробарии (**) гузошта ҳосил мекунем

$$x^3 + x^3 lny - y^2 = C$$

Баробарии охирин интеграли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Мисолҳо барои кори мустақилона

Муодилаҳоро ҳал кунед.

9.1. $(\frac{3x^2}{y^3} + y^2)dx + (2xy - \frac{3x^3}{y^4})dy = 0.$

9.2. $(x^2 - 2xy)dx - (x^2 + y^4)dy = 0.$ 9.3. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = dx.$

9.4. $(e^x + y + siny)dx + (e^y + x + xcosy)dy = 0.$

9.5. $(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0.$

9.6. $(x + siny)dx + (xcosy + siny)dy = 0.$

9.7. $(xy + siny)dx + (0.5x^2 + xcosy)dy = 0.$

9.8. $(lny - 5y^2 sin5x)dx + (\frac{x}{y} + 2ycos5x)dy = 0, \quad y(0) = e.$

9.9. $2xydx + (x^2 - y^2) = 0.$

9.10. $(tgy - ycosec^2x)dx + (ctgx + xsec^2y)dy = 0.$

9.11. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdy-ydx}{x^2} = 0.$

9.12. $(\frac{y}{x^2+y^2} - y)dx + (e^y - x - \frac{x}{x^2+y^2}) = 0.$ 9.13. $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{(y^2-3x^2)dy}{y^4} = 0, \ y|_{x=1} = 1.$

9.14. $(arcsinx + 2xy)dx + (x^2 + 1 + arctgy)dy = 0.$

9.15. $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0.$