Лексия 6. Муодилаҳое, ки ба муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда оварда мешаванд

Бисёр муодилаҳои дифференсиалӣ бо ёрии иваз намудани тағйирёбандаҳо ба муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда оварда мешаванд.

1. Муодилаи намуди $y' = f(ax + by)$.

Дар ин муодила a ва b -ададҳои доимӣ мебошанд. Барои ҷудо кардани таг -йирёбандаҳо дар ин муодила гузориши $z = ax + by$ иҷро мекунем, ки дар ин ҷо z - функсияи номаълуми нав мебошад.

Мисоли 1. Муодиларо хал кунед.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y$$

Ҳал. Гузориши $z = 2x + y$ -ро дохил намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

ё

$$\frac{dz}{dx} = 2 + z$$

Тағйирёбандаҳоро ҷудо мекунем:

$$\frac{dz}{2+z} = dx$$

Аз ин ҷо интеграл гирифта, ҳосил мекунем:

$$\int \frac{dz}{2+z} = x + ln|C|$$

ё

$$ln|2+z| = x + ln|C|$$

Бо ёрии потенсиронӣ баробариро ба намуди зерин меоварем:

$$2 + z = Ce^x$$

ё

$$z = -2 + Ce^x.$$

Акнун дар ин баробарӣ $z = 2x + y$ -ро гузошта, ҳосил мекунем:

$$2x + y = -2 + Ce^x$$

ё

$$y = Ce^x - 2x - 2.$$

Ин формула ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

2. Муодилаи якҷинса

Функсияи ду тағйиребандаи $f(x, y)$ функсияи якҷинсаи ченаки n номида мешавад, агар барои ҳар гуна қимати ҳақиқии параметри t айнияти зерин ҷой дошта бошад:

$$f(tx, ty) \equiv t^n f(x, y)$$

Агар $n = 0$ бошад, он гоҳ функсияи $f(x, y)$ -ро функсияи якҷинсаи ченаки нулӣ меноманд. Дар ин ҳолат

$$f(tx, ty) \equiv t^0 f(x, y) = f(x, y)$$

мешавад.

Мисоли 1. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ функсияи якҷинсаи ченаки як мебошад. Дар ҳақиқат

$$f(tx, ty) = \sqrt[3]{(tx)^3 + (ty)^3} = \sqrt[3]{t^3(x^3 + y^3)} = t\sqrt[3]{x^3 + y^3} = tf(x, y)$$

Мисоли 2. $f(x, y) = xy - y^2$ функсияи якҷинсаи ченаки ду мебошад:

$$f(tx, ty) = (tx)(ty) - (ty)^2 = t^2xy - t^2y^2 = t^2(xy - y^2) = t^2 f(x, y)$$

Мисоли 3. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ функсияи якҷинсаи ченаки нулӣ мебошад:

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)(ty)} = \frac{t^2x^2 - t^2y^2}{t^2xy} = \frac{t^2(x^2 - y^2)}{t^2xy} = t^0 \frac{x^2 - y^2}{xy} = f(x, y)$$

Муодилаи $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, ки дар он функсияи $f(x, y)$ функсияи якҷинсаи ченаки нулӣ аст, муодилаи якҷинса номида мешавад.

Муодилаи якҷинсаро ҳама вақт ба намуди

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x}) \qquad (1)$$

овардан мумкин аст.

Дар муодилаи (1)гузориши $u = \frac{y}{x}$ -ро иҷро намуда, онро ба муодилаи таг -йирёбандаҳояш ҷудошаванда овардан мумкин аст

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Агар $u = u_0$ решаи муодилаи $\varphi(u) - u = 0$, он гоҳ муодилаи охирин ҳалли $u = u_0$-ро низ дорад, яъне функсияи $y = u_0 x$ низ ҳалли муодилаи аввала мебошад.

Қайд. *Ҳангоми ҳал кардани муодилаи якҷинса онро ба намуди (1) овардан шарт нест. Якбора гузориши $y = ux$-ро иҷро кардан лозим аст.*

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед

$$(x - y)dx + xdy = 0.$$

Ҳал. Муодиларо дар намуди

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x}$$

менависем.

Дар ин муодила $f(x, y) \equiv \frac{y-x}{x}$ функсияи якҷинсаи ченаки нулӣ аст, чунки

$$f(tx, ty) = \frac{ty - tx}{tx} = \frac{t(y - x)}{tx} = t^0\frac{y - x}{x} = \frac{y - x}{x} \equiv f(x, y).$$

Бинобар ин гузориши $y = ux$ -ро иҷро мекунем. Он гоҳ,

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Дар натиҷа муодилаи додашуда ба намуди зерин меояд:

$$u + x\frac{du}{dx} = u - 1$$

ё

$$x\frac{du}{dx} = -1.$$

Аз ин ҷо

$$du = -\frac{dx}{x}.$$

Ҳар ду тарафи баробариро интегронида меёбем:

$$\int du = -\int \frac{dx}{x},$$

$$u = -ln|x| + C$$

ё

$$u = C - ln|x|.$$

Ба ҷойи u ифодаи $\frac{y}{x}$ -ро гузошта, ҳалли умумии муодиларо ҳосил мекунем

$$y = x(C - ln|x|).$$

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Ҳал. Дар ин муодила функсияи $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ функсияи якҷинсаи ченаки нулӣ аст, чунки

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)(ty)}{(tx)^2 - (ty)^2} = \frac{t^2xy}{t^2(x^2 - y^2)} = t^0\frac{xy}{x^2 - y^2} = f(x, y)$$

Пас муодилаи додашуда муодилаи якҷинса мебошад. Бинобар ин аз гузориши $y = ux$ истифода мебарем.

$$y = ux, \qquad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Ифодаҳои ҳосилшударо дар муодилаи додашуда гузошта, меёбем:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2}$$

ё

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2}$$

Муодилаи ҳосилшуда муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда мебошад. Тағйирёбандаҳоро ҷудо намуда, ҳосил мекунем:

$$\frac{1 - u^2}{u^3}du = \frac{dx}{x}$$

ё

$$(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u})du = \frac{dx}{x}$$

Аз ҳар ду тарафи баробарӣ интеграл мегирем

$$\int (\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u})du = \int \frac{dx}{x}$$

Аз ин ҷо

$$-\frac{1}{2u^2} - ln|u| = ln|x| + ln|C|$$

ё

$$-\frac{1}{2u^2} = ln|uxC|$$

Ба ҷойи u ифодаи $\frac{y}{x}$ гузошта интерали умумии муодилаи додашударо ҳосил мекунем:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = ln|Cy|$$

ё

$$x^2 + 2y^2 ln|Cy| = 0$$

Мисоли 3. Хати каҷеро ёбед, ки аз нуқтаи (1;1) гузашта дарозии расандаи ба нуқтаи дилхоҳи он гузаронидашуда ба порчае, ки расанда дар тири Ox ҷудо мекунад, баробар бошад (Дар ин ҷо дарозии расанда ҳамчун дарозии порчаи расанда аз нуқтаи расиш то нуқтаи буриш бо тири Ox фаҳмида мешавад).

Ҳал. Бигзор $A(x; y)$ нуқтаи ихтиёрии хати каҷ бошад. Бо M нуқтаи бурриши расандаро бо тири Ox ишора мекунем. Аз рӯи шарти масъала $MA = OA$ аст. Маълум аст, ки дарозии расанда ба

$$MA = \left| \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} \right|$$

баробар аст. Абссисаи нуқтаи M -ро меёбем. Дар муодилаи расанда

$$Y - y = f'(x)(X - x)$$

$Y_M = 0$ гузошта ҳосил мекунем:

$$-y = y'(X_M - x)$$

аз ин ҷо

$$X_M = x - \frac{y}{y'}$$

Пас

$$OA = \left| x - \frac{y}{y'} \right|$$

Дар асоси шарти масъала

$$\left| \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} \right| = \left| x - \frac{y}{y'} \right|$$

Ҳар ду тарафи ин баробариро ба квадрат мебардорем

$$\frac{y^2}{y'^2}(1 + y'^2) = x^2 - 2x\frac{y}{y'} + \frac{y^2}{y'^2}$$

Аз ин ҷо

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Муодилаи ҳосилшуда муодилаи дифференсиалии якҷинса мебошад. Дар он гузориши $y = ux$ -ро иҷро намуда муодилаи ҳосилшударо содда мекунем

$$u'x + u = \frac{2xux}{x^2 - u^2x^2},$$

$$u'x = \frac{2u}{1 - u^2} - u \quad \text{ё} \quad u'x = \frac{u + u^3}{1 - u^2}.$$

Аз ин ҷо

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u + u^3}{1 - u^2}.$$

Дар ин муодила тағйирёбандаҳо ҷудо мешаванд

$$\frac{(1 - u^2)}{u + u^3}du = \frac{dx}{x}$$

Аз ҳар ду тараф интеграл гирифта муносибати ҳосилшударо содда мекунем

$$\int \frac{(1 - u^2)}{u + u^3}du = \int \frac{dx}{x},$$

$$ln|u| - ln|1 + u^2| = ln|x| + lnC,$$

$$ln|\frac{u}{1 + u^2}| = ln|Cx|,$$

$$\frac{u}{1+u^2} = Cx$$

Ба ҷойи u ифодаи $\frac{y}{x}$ гузошта ҳосил мекунем

$$\frac{\frac{y}{x}}{(1+(\frac{y}{x})^2)} = Cx$$

Ҳамин тавр интеграли умумии муодила чунин аст

$$y = C(x^2+y^2)$$

Мувофиқи шарти масъала агар $y(1) = 1$. Қиматҳои ибтидоиро дар ҳалли умумӣ мегузорем

$$1 = C(1+1) \quad \text{аз ин ҷо} \quad C = \frac{1}{2}$$

Ин қимати C-ро дар интеграли умумӣ гузошта баъди соддакунӣ ҳосил мекунем

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Ҳамин тариқ, хати каҷи ҷусташаванда давраи радиусаш $r = 1$ ва марказаш дар нуқтаи (0;1) мебошад.

Мисолҳо барои кори мустақилона

Муодилаҳоро ҳал кунед.

54. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$. 55. $y^2dx - (x^2+xy)dy = 0$. 56. $(x^2 - xy + y^2)dx - x^2dy = 0$.

57. $y' - y = 2x - 3$. 58. $xy' = y + xe^{y/x}$. 59. $xcos\frac{y}{x}dy + (x - cos\frac{y}{x})dx$, $y(1) = 0$.

60. $xy' - y = y(lny - lnx)$. 61. $y' = 4 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$, $y(1) = 2$. 62. $y' = sin(x-y)$.

63. $xy' - y = \frac{x}{arctg(\frac{y}{x})}$ 64. $(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2+y^2)dy = 0$, $y(1) = 0$.

65. $3ysin(\frac{3x}{y})dx + \Big(y - 3xsin(\frac{3x}{y})\Big)dy = 0$. 66. $xy' - y = (x+y)ln\frac{x+y}{x}$.

67. Шакли оинаеро муайян намоед, ки ҳамаи нурҳои параллелро дар як нуқта ҷамъ менамояд.

68. Хати каҷеро ёбед, ки ҳамаи нормалҳои он аз як нуқта мегузаранд.

69. Шакли прожекторро ёфтан зарур аст, ки он нурҳои аз манбаи нуқтавии рушноии O баромада параллел ба равиши додашуда инъикос намояд.

3. Муодилаи намуди $\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\Big)$

Дар ин муодила a, b, c, a_1, b_1, c_1- ададҳои доимӣ мебошанд. Агар $c_1 = c_2 = 0$ бошанд, он гоҳ муодилаи якҷинсаро ҳосил мекунем, ки онро дар пункти 2 омӯхтем. Бинобар ин фарз мекунем, ки ақаллан яке аз адаҳои c_1 ва c_2 нобаробари сифр аст. Ду ҳолатро дида мебароем.

Ҳолати якум. Муайянкунадаи аз коэффисиентҳои назди x ва y тартиб додашуда нобаробари сифр аст.

$$\triangle = \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1}$$

Сурат ва махраҷи қисми рости муодиларо баробари сифр гирифта, системаи муодилаҳои алгебравии хаттии

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

-ро ҳал мекунем. Дар асоси шарти (1) ин система ҳалли ягона дорад. Фарз мекунем, ки x_0 ва y_0 ҳалли ин система мебошанд. Он гоҳ гузориши

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0 \tag{3}$$

-ро иҷро мекунем, ки дар ин ҷо ξ ва η тағйирёбандаҳои нав мебошанд. Гузориши (3) -ро дар муодила гузошта, ҳосил мекунем:

$$dx = d\xi, \quad dy = d\eta;$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\Big(\frac{a(\xi + x_0) + b(\eta + y_0) + c}{a_1(\xi + x_0) + b_1(\eta + y_0) + c_1}\Big)$$

Азбаски x_0 ва y_0 ҳалли системаи (2) мебошанд, пас $ax_0+by_0+c \equiv 0, \quad a_1x_0+b_1y_0 + c_1 \equiv 0$ мешаванд. Дар натиҷа муодилаи якҷинсаи

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\Big(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\Big) \tag{4}$$

-ро нисбат ба тағйирёбандаҳои η ва ξ ҳосил мекунем. Дар муодилаи (4) η-функсияи номаълуми ξ мебошад. Баъди интегронии муодила (4) мувофиқи

(3) аз тағйирёбандаҳои ξ ва η ба x ва y гузашта, ҳалли умумии муодилаи додашударо ҳосил мекунем.

Ҳолати дуюм. Муайянкунандаи

$$\triangle = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 0$$

аст. Аз ин ҷо

$$ab_1 - a_1b_1 = 0$$

ё

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

мешавад, яъне коэффисиентҳои a, b, a_1 ва b_1 мутаносиб мебошанд:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k \qquad \text{ё} \qquad a = ka_1, \quad b = kb_1$$

Мувофиқи ин баробариҳо муодилаи додашударо дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c_1}\Big)$$

Муодилаи ҳосилшуда бо ёрии гузориши $z = ax + by$ ба муодилаи таг -йирёбандаҳояш ҷудошаванда оварда мешавад.

Қайд. *Баъзе вақтҳо муодилаҳоро бо ерии гузориши $y = z^k$ ба муодиали якҷинса меоваранд. Ин дар ҳолате имконпазир аст, ки баъди гузориш дар муодила ченаки ҳамаи аъзоҳо яккхела шаванд, агар x -ро тағйиребандаи ченаки як, y -ро тағйиребандаи ченаки k ва ҳосилаи $\frac{dy}{dx}$ -ро тағйиребандаи ченаки $k - 1$ ҳисоб кунем.*

Адади доимии k пешакӣ маълум нест. Онро аз шартҳои номбурда муайян мекунанд. Агар чунин адади k мавҷуд набошад, пас муодиларо бо ин гузориш ҳал кардан мумкин нест.

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед.

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$$

Ҳал. Аз коэффисиентҳои назди x ва y муайянкунанда тартиб медиҳем:

$$\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \neq 0$$

Системаи муодилаҳоро тартиб медиҳем.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0, \\ \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

$x = x_0 = 1$ ва $y = y_0 = 2$ ҳалли системаи додашуда мебошанд. Гузориши $x = \xi + 1$ ва $y = \eta + 2$-ро дар муодилаи додашуда иҷро карда муодилаи якҷинсаи зеринро ҳосил мекунем:

$$(2\xi - 4\eta)d\xi + (\xi + \eta)d\eta = 0$$

Аз гузориши

$$\xi = t\eta, \quad d\xi = \eta dt + td\eta$$

истифода бурда, муодиларо дар намуди зерин менависем.

$$\eta^2(2t - 4)dt + \eta(2t^2 - 3t + 1)d\eta$$

Муодилаи охирин муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда мебошад. Дар он тағйирёбандаҳоро чудо мекунем

$$\frac{2t-4}{2t^2 - 3t + 1}dt + \frac{d\eta}{\eta} = 0$$

Ҳар ду тарафи баробариро интегронида ҳосил мекунем:

$$\int \frac{2t-4}{2t^2 - 3t + 1}dt + \int \frac{d\eta}{\eta} = lnC$$

$$3ln|2t - 1| - 2ln|t - 1| + ln|\eta| = lnC$$

$$ln|2t - 1|^3 + ln|\eta| = lnC + ln|t - 1|^2$$

Хосияти логарифмҳоро истифода бурда, баробарии охиринро чунин менависем:

$$\eta(2t - 1)^3 = C(t - 1)^2$$

Ба ҷойи t ифодаи $\frac{\xi}{\eta}$ ва баъд ба ҷойи ξ ифодаи $x - 1$ ва ба ҷойи η ифодаи $y - 2$ -ро гузошта ҳалли умумии муодилаи додашударо ҳосил мекунем:

$$(2x - y)^3 = C(x - y + 1)^2$$

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед.

$$(4x + 2y + 5)dx + (2x + y + 2)dy = 0$$

Ҳал. Муайянкунандаро тартиб медиҳем.

$$\left| \qquad\qquad \right| = 4 - 4 = 0$$

Гузориши $2x + y = z$ -ро дохил намуда, муодиларо дар намуди

$$(2z + 5)dx + (z + 2)(dz - 2dx) = 0$$

менависем.

Муодилаи ҳосилшуда муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда мебошад. Дар он тағйирёбандаҳоро ҷудо мекунем:

$$dx + (z + 2)dz = 0$$

ва аз ҳар ду тараф интеграл мегирем

$$\int dx + \int (z + 2)dz = C_1$$

$$x + \frac{z^2}{2} + 2z = C_1$$

ё ин ки

$$2x + z^2 + 4z = C_1 \quad (C = 2C_1)$$

Ба ҷойи z ифодаи $2x + y$ -ро гузошта, ҳалли умумии муодиларо ҳосил мекунем:

$$2x + (2x + y)^2 + 4(2x + y) = C$$

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед.

$$(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$$

Ҳал. Гузориши $y = z^k$ -ро иҷро мекунем, ки дар ин ҷо k адади доимие мебошад, ки онро баъдтар муайян мекунем. Азбаски $dy = kz^{k-1}dz$, пас дар натиҷаи гузориш муодилаи зерин пайдо мешавад.

$$(x^2z^{2k-1})kz^{k-1}dz + 2xz^{3k}dx = 0,$$

ё

$$(x^2z^{3k-1} - z^{k-1})kdz + 2xz^{3k}dx = 0$$

Қайд мекунем, ки x^2z^{3k-1} ченаки $2+3k-1 = 3k+1$, z^{k-1} ченаки $k-1$, xz^{3k} ченаки $1+3k$ -ро дорад. Муодилаи ҳосилшуда якҷинса мешавад, агар ҳамаи аъзоҳояшон ченаки якхела дошта бошанд, яъне агар баробарии $3k+1=k-1$, ё $k=-1$ иҷро шавад.Ҳангоми $k=-1$

муодилаи охирин намуди зеринро мегирад

$$\Big(\frac{1}{z^2}-\frac{x^2}{z^4}\Big)dz+2\frac{x}{z^3}dx=0,$$

ё

$$(z^2-x^2)dz+2zxdx=0$$

Нисбат ба тағйирёбандаҳои x ва муодилаи якҷинса ҳосил шуд. Дар он мегузорем:

$z=ux,\ dz=udx+xdu$ Он вақт муодила намуди

$$(u^2-1)(udx+xdu)+2udx=0$$

-ро мегирад.

Аз ин ҷо

$$u(u^2+1)dx+x(u^2-1)du=0.$$

Дар ин муодила тағйирёбандаҳоро ҷудо намуда, меинтегронем

$$\frac{dx}{x}+\frac{u^2-1}{u^3+u}du=0,$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{u^2-1}{u^3+u}du=lnC.$$

ё

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C.$$

Тағйирёбандаи u -ро бо $\frac{1}{xy}$ иваз намуда, ҳалли умумии муодилаи додашударо ҳосил мекунем:

$$1+x^2y^2=Cy$$

Мисолҳо барои кори мустақилона

Муодилаҳоро ҳал кунед.

6.1. $(x+4y)y'=2x+3y-5,$ 6.2. $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$

6.3. $(y+2)dx=(2x+y-4)dy,$ 6.4. $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2,$ 6.5. $y'=y^2-\frac{2}{x^2}$

6.6. $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0,\ y(0)=2,$ 6.7. $8x+4y+1+(4x+2y+1)y'=0$

6.8. $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0,$ 6.9. $x+y-2+(1-x)y'=0$

6.10. $2x+3y-5+(3x+2y-5)y'=0,$ 6.11. $(x+y)dx+(x-y-2)dy=0$

6.12. $(y'+1)ln\frac{y+x}{x+3}=\frac{y+x}{x+3},$ 6.13. $y'=\frac{y+2}{x+1}+tg\frac{y-2x}{x+1}$

6.14. $2y+(x^2y+1)xy'=0,$ 6.15. $(3y-7x+7)dx-(3x-7y-3)dy=0$

6.16. Хати каҷеро ёбед, ки барои он нисбати порчае, ки расандаи ихтиёриаш дар тири Oy мебурад, бар радиус- вектори нуқтаи расиш бузургии доимӣ мебошад.

6.17. Координатаҳои росткунҷаviро истифода бурда, шакли оинаеро муайян кунед, ки ҳамаи нурҳои параллел инъикосшаванда аз нуқтаи додашуда бароянд.