Лексия 5. Муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда

Муодилаи намуди

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \tag{1}$$

муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда номида мешавад. Ин муодила бо методи ҷудо кардани тағйирёбандаҳо ҳал карда мешавад. Барои ин ҳар ду тарафи муодиларо ба функсия $\frac{1}{P(x)N(y)}$ зарб намуда, муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0 \tag{2}$$

Муодилаи (2) муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошуда мебошад. Онро интегронида, ҳосил мекунем:

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C \tag{3}$$

Формулаи (3) интеграли умумии муодилаи (1)-ро ифода мекунад.

Қайд. *Дар ҳолати тақсим намудан ба функсияи $P(x)N(y)$, ҳалҳои хусусӣ, ки ҳосили зарби $P(x)N(y)$-ро ба сифр мубаддал мекунанд, гум шуда метавонанд. Бинобар ин баробариҳои $P(x) = 0$, $N(y) = 0$-ро алоҳида тадқиқ кардан лозим аст. Аз онҳо баъзан ҳалҳои иловагии муодиларо пайдо кардан мумкин аст.*

Мисоли 1. Муодилаи

$$ycosxdx - sinxdy = 0$$

-ро ҳал кунед.

Ҳал. Дар ин муодила

$$P(x) \equiv sinx, \quad M(x) \equiv cosx, \quad N(y) \equiv y, \quad Q(y) \equiv 1$$

Ҳар ду тарафи муодиларо ба функсияи $\frac{1}{P(x)N(y)} \equiv \frac{1}{ysinx}$ зарб карда, муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошударо ҳосил мекунем

$$\frac{cosx}{sinx}dx - \frac{1}{y}dy = 0.$$

Акнун аз ҳар ду тараф интеграл мегирем

$$\int \frac{cosx}{sinx}dx - \int \frac{1}{y}dy = ln|C|$$

ё

$$\int \frac{d(sinx)}{sinx} - \int \frac{dy}{y} = ln|C|$$

Аз ин ҷо

$$ln|sinx| - ln|y| = ln|C|$$

Хосияти логарифмҳоро истифода бурда, ҳалли умумии муодиларо дар намуди зерин ҳосил мекунем.

$$y = Csinx$$

Ба ғайр аз маҷмӯи ҳалҳои ёфташуда муодила ҳалҳои $x = k\pi$ $(k \in Z)$-ро дорад, ки дар онҳо $sinx = 0$ аст.

Мисоли 2. Ҳалли хусусии муодилаи

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0,$$

ки шарти ибтидоии $y|_{x=0} = 1$ -ро қаноат мекунад, ёфта шавад.

Ҳал. Дар ин муодила

$$P(x) \equiv \sqrt{1-x^2}, \quad M(x) \equiv x, \quad N(y) \equiv \sqrt{1-y^2}, \quad Q(y) \equiv y$$

Ҳар ду тарафи муодиларо ба функсияи $\frac{1}{P(x)N(y)} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$ зарб карда, муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошударо ҳосил мекунем:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$$

Ҳар ду тарафи баробариро меинтегронем:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = C_1$$

Аз ин ҷо

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}} = C_1$$

$$-\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}d(1-x^2) - \frac{1}{2}\int (1-y^2)^{-1/2}d(1-y^2) = C_1$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{(1-y^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = C_1$$

Ҳалли умумии муодилаи додашуда намуди зеринро мегирад:

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C.$$

Шарти ибтидоии $y|_{x=0}=1$ -ро дар ҳалли умумӣ гузошта, меёбем.

$$\sqrt{1-0}+\sqrt{1-1}=C$$

Аз ин ҷо

$$C=1$$

Қимати C-ро дар ҳалли умуми гузошта, ҳалли хусусии муодиларо ҳосил мекунем

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$$

Мисоли 3. Дар зарф 100л маҳлул аст, ки 10кг намак дорад. Ба зарф мунтазам 3л об дар як дақиқа рехта мешавад. Оби ба зарф рехташуда бо маҳлули дар он мавҷуд буда омехта карда мешавад ва маҳлул бо ҳамин суръат берун мебарояд. Баъд аз як соат дар зарф чӣ қадар намак боқӣ мемонад.

Ҳал. Бигзор миқдори намаки дар зарф дар лаҳзаи вақти t-дақиқа мавҷудбуда x-бошад. Дар он вақт омехташавии c чунин мешавад:

$$c=\frac{x}{100}\text{кг} \quad \text{дар } \ 1\text{л}.$$

Агар суръати тағйирёбии миқдори намак дар зарф дар лаҳзаи вақти t бо ҳосилаи $\frac{dx}{dt}$ муайян карда шавад, он гоҳ суръати камшавии миқдори намак $-\frac{dx}{dt}$ мебошад. Аз тарафи дигар, азбаски намакоб аз зарф бо суръати 3л дар як дақиқа мебарояд, он гоҳ худи ҳамон суръати тағйирёбии миқдори намак ба $\frac{3x}{100}$ баробар аст. Ҳамин тариқ,

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{3x}{100}$$

Таносуби ҳосилшударо дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\frac{dx}{x}=-0,03dt$$

Муодилаи ҳосилшуда муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошуда мебошад. Онро интегронида ҳосил мекунем

$$lnx=-0,03t+C$$

Азбаски ҳангоми $t=0$ миқдори намак $x=10$ аст, пас аз ифодаи охирин ҳосил мекунем

$$ln10=C$$

Ҳамин тавр ба муносибате меоем, ки он миқдори намак x -ро баъди гузаштани t дақиқа муайян мекунад

$$lnx=-0,03t+ln10$$

Дар ин ҷо $t=60$ гузошта, миқдори намаки боқимондаро дар зарф баъди як соати вақт меёбем:

$$lnx=-1,8+ln10$$

Аз ҷадвали логарифмҳои натуралӣ истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$x=1,654\text{кг}$$

Мисоли 4. Ҷисм дар 10 дақиқа аз 100^0 то 60^0 хунук шуд. Ҳарорати ҳавои муҳит 20^0 нигоҳ дошта мешавад. Кай ҷисм то 30^0 хунук мешавад? Суръати хунукшавии ҷисм ба фарқи ҳарорати ҷисм ва ҳарорати ҳавои муҳит мутаносиб қабул карда шавад.

Ҳал. Бигзор t -вақт ва T - ҳарорати ҷисм бошад. Он гоҳ $\frac{dT}{dt}$ -суръати хунукшавии ҷисм аст. Фарқи ҳарорати ҷисм T ва ҳавои муҳит 20^0, яъне $T-20$ ба $\frac{dT}{dt}$ мутаносиб аст:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-20),$$

ки дар ин ҷо k коэффисиенти мутаносибӣ мебошад.

Муодилаи ҳосилшуда муодилаи дифференсиалии тағйирёбандаҳояш ҷудошаванд мебошад. Дар он тағйирёбандаҳоро ҷудо мекунем

$$\frac{dT}{T-20}=kdt$$

Муодилаи ҳосилшударо интегронида, ҳосил мекунем

$$\int\frac{dT}{T-20}=\int kdt$$

Аз ин ҷо

$$ln|T-20|=kt+lnC$$

$$T=20+Ce^{kt}$$

Баробарии охирин ҳалли умумии муодилаи тартибдодашуда аст.

Агар $t=0$ бошад, он гоҳ $T=100$ буда, агар $t=10$ бошад, он гоҳ $T=60$ аст, яъне

$$\begin{cases}100=20+Ce^{k\cdot 0},\\ 60=20+Ce^{10k}\end{cases}$$

Аз ин ҷо

$$\begin{cases}C=80,\\ k=\frac{1}{10}ln\frac{1}{2}\end{cases}$$

Қиматҳои C ва k -ро дар ҳалли умумии муодила гузошта, ҳалли хусусии муодиларо ҳосил мекунем:

$$T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$$

Дар баробарии охирин $t=30$ гузошта, ҳалли масъаларо меёбем:

$$T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=20+10=30,$$

яъне ҷисм баъд аз 30 дақиқа то 30^0 хунук мешавад.

Мисолҳо барои кори мустақилона

Муодилаҳои дифференсиалиро ҳал кунед.

5.1. $lncosydx+xtgydy=0.$ 5.2. $\frac{yy'}{x}+e^y=0,\ \ y(1)=0.$ 5.3. $y'=e^{2x-4y}.$

5.4. $e^{1+x^2}tgydx-\frac{e^{2x}}{x-1}dy=0,\ \ y(2)=\frac{\pi}{4}.$ 5.5. $sec^2xtgydx+sec^2ytgxdy=0,\ \ y(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

5.6. $y'=sh(x+y)+sh(x-y).$ 5.7. $\frac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}}=\frac{3y+2}{x+1}y'.$ 5.8. $xy'=tgy$

5.9. $\sqrt{y}dx+x^2dy=0.$ 5.10. $cos^2ydx-(x^2+1)dy=0.$ 5.11. $y'=\frac{y^2-1}{x^2+1},\ \ y(\frac{\pi}{4})=0.$

5.12. $(xy^2-y^2)dx+(x^2y+x^2)dy=0.$ 5.13. $3^{x-y}dx-4^{x+y}dy=0.$

5.14. $x(y^2+1)dx-ye^{x^2}dy=0.$ 50. $y'+ysin2x=0,\ \ y(\frac{\pi}{4})=1.$

5.16. $(1+x)ydx + (1-y)dy = 0$. 5.17. $e^x sin^3 y + (1+e^{2x})cosy \cdot y' = 0$.

5.18. Дар зарф 10л об аст. Ба зарф бо суръати 2л дар як дақиқа маҳлул рехта мешавад, ки он 0,3кг намак дорад. Маҳлули зарф мунтазам омехта карда мешавад ва он бо ҳамон суръат берун мерезад. Баъд аз 5 дақиқа дар зарф чӣ қадар намак мемонад?.