Лексия 15. Мафҳум дар бораи нуқтаҳои махсус

Таъриф. Нуқтаи M(x,y) -и соҳаи D барои муодилаи дифференсиалии

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

муқаррарӣ номида мешавад, агар аз ин нуқта дар ягон атрофи он фақат ва фақат якто хати каҷи интегралӣ гузарад (расми 9).

Ҳамаи нуқтаҳои N-и соҳаи D, ки нуқтаҳои муқаррарӣ нестанд ё дар сарҳади Γ -и соҳаи D воқеъ мебошанд, барои муодилаи (1) нуқтаҳои махсус мебошанд. Аз нуқтаи махсус ёягонто хати каҷи интегралӣ намегузарад ё якчандто хати каҷи интегралӣ мегузаранд.

Нуқтаҳои махсуси муодилаи дифференсиалии (1) системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ \\ Q(x,y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

-ро қаноат мекунанд.

расми 9 *расми 10*

Мисоли 1. Нуқтаҳои махсуси муодилаи

$$2ydx - xdy = 0$$

муайян карда шаванд.

Ҳал. Аён аст, ки ягона нуқтаи махсуси муодилаи додашуда, фақат нуқтаи O(0,0) шуда метавонад. Бевосита нишон додан мумкин аст, ки ҳалли умумии муодилаи додашуда функсияи

$$y = Cx^2$$

мебошад ва равшан аст, ки аз нуқтаи O(0,0) беохири хатҳои каҷи интегралӣ (параболаҳо) мегузаранд (расми 10). Чунин нуқтаи махсусро гиреҳ, меноманд.

§14. Ҳалҳои махсус.

Мафҳуми ҳалли махсус ва усулҳои асосии ҷустуҷӯи ҳалҳои махсуси муодилаи

$$F(x, y, y') = 0$$

дар п. 1-и §10 баён карда шуданд. Ин ҷо намунаи масъалаҳо оид ба ёфтани ҳалҳои махсус оварда мешаванд.

Мисоли 1 . Ҳалли махсуси муодилаи дифференсиалии

$$xy' + (y')^2 - y = 0 \tag{1}$$

-ро ёбед.

Ҳал. а) Хати каҷи p -дискриминантии муодиларо меёбем. Барои ин системаи муодилаҳои зеринро тартиб медиҳем:

$$\begin{cases} F(x, y, y') \equiv xy' + (y')^2 - y = 0, \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y'} \equiv x + 2y' = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Аз муодилаи дуюм

$$y' = -\frac{x}{2}$$

Ифодаи ҳосилщударо дар муодилаи якуми системаи (2) мегузорем

$$x \cdot (-\frac{x}{2}) + (-\frac{x}{2})^2 - y = 0$$

ё

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} - y = 0$$

Аз ин ҷо

$$y = -\frac{x^2}{4} \tag{3}$$

Хати каҷи $y = -\frac{x^2}{4}$ хати каҷи p -дискриминантии муодилаи додашуда мебошад, ки аз як шоха иборат аст ва он параболаро тасвир мекунад.

б) Нишон медиҳем, ки хати каҷи p -дискриминантӣ ҳалли муодилаи додашуда аст. Барои ин $y = -\frac{x^2}{4}$-ро дар муодила мегузорем

$$x \cdot (-\frac{x^2}{4})' + ((-\frac{x^2}{4})')^2 - (-\frac{x^2}{4}) = 0$$

ё

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}=0,$$

яъне функсияи $y=-\frac{x^2}{4}$ ҳалли муодилаи додашуда мебошад.

в) Нишон медиҳем, ки ҳалли $y=-\frac{x^2}{4}$ ҳалли махсус мебошад, яъне аз ҳар як нуқтаи ин ҳал ягон ҳалли дигари муодилаи додашуда мегузарад, ки ҳарду ҳал дар ин нуқта расандаи умумӣ доранд.

Барои ин ҳалли умумии муодилаи додашударо меёбем. Муодиларо дар намуди

$$y-xy'+(y')^2=0 \tag{1'}$$

менависем. Он муодилаи Клеро мебошад.

Ҳалли умумии ин муодила намуди зеринро дорад:

$$y=Cx+C^2 \tag{4}$$

Нишон медиҳем, ки дар ҳар як нуқтаи параболаи (3) ягон хати рости (4) ба он расанда мебошад. Маълум аст, ки шарти расиши ду хати каҷи $y=y_1(x)$ ва $y=y_2(x)$ дар нуқтаи $x=x_0$ чунин аст:

$$y_1(x_0)=y_2(x_0), \qquad y_1'(x_0)=y_2'(x_0) \tag{5}$$

Дар масъала

$$y_1(x)=-\frac{x^2}{4}, \qquad y_2(x)=Cx+C^2$$

мегирем. Он вақт шарти (5) намуди зерин мегирад:

$$-\frac{x_0^2}{4}=Cx_0+C^2, \qquad -\frac{x_0}{2}=C \tag{6}$$

$C=-\frac{x_0}{2}$ -ро дар баробарии якуми (6) гузошта, ҳосил мекунем:

$$-\frac{x_0^2}{4}=-\frac{x_0^2}{2}+\frac{x_0^2}{4}$$

ё ин ки

$$-\frac{x_0^2}{4}=-\frac{x_0^2}{4}$$

яъне ҳангоми $C=-\frac{x_0}{2}$ будан, баробарии якум барои ихтиёрӣ нуқтаи абссиса айниятан иҷро мешавад. Ҳамин тариқ, дар ҳар як нуқтаи хати каҷи абссисааш x_0 -и $y=-\frac{x^2}{4}$ хати рости $y=-\frac{x_0}{2}x+\frac{x_0^2}{2}$ аз оилаи хатҳои $y=Cx+C^2$ расанда мебошад. Пас $y=-\frac{x^2}{4}$ халли махсуси муодилаи додашуда мебошад.

Ҳалли умумии муодилаи додашуда оилаи хатҳои рости $y = Cx + C^2$ буда, ҳалли махсуси он $y = -\frac{x^2}{4}$ иҳотагири ин оилаи хатҳои рост мебошад (расми 11).

расми 11

Мисоли 2. Ҳалли махсуси муодилаи дифференсиалиро ёбед.

$$y^2(1 + y'^2) = 1$$

Ҳал. Гузориши $y' = p$ -ро иҷро карда баробарии зеринро ҳосил мекунем

$$y^2(1 + p^2) = 1$$

Мувофиқи қоидаи якуми ҷустуҷӯи ҳалли махсус системаи зеринро тартиб медиҳем:

$$\begin{cases} y^2(1 + p^2) = 1, \\ \\ 2y^2p = 0. \end{cases}$$

Аз ин ҷо

$$\text{а) } y = 0, \qquad \text{б) } y = \pm 1$$

$y = 0$ - хати каҷи интегралиро ифода накарда, ҷои геометрии нуқтаҳои махсуси оилаи хатҳои каҷи

$$(x - C)^2 + y^2 = 1 \tag{$*$}$$

-и муодилаи дифференсиалии додашударо ифода мекунад (расми 12). Хатҳои рости $y = \pm 1$ бошанд, ҳалли махсусро ифода мекунанд, ки представ-т собой ветки огибающей окруж-ей $(*)$.

расми 12

Бигузор ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии (1) маълум бошад, яъне

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{4}$$

Чи хеле, ки аз курси анализи математикӣ маълум аст, оги-ая семейств кривых (4) системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

-ро қаноат мекунанд.

Аз системаи муодилаҳои (5) параметри C -ро хориҷ карда, муодилаи баъзе хатҳоро ҳосил мекунем:

$$D_C(x, y) = 0 \tag{6}$$

Баробарии (6) -ро С -дискриминанти хати каҷи муодилаи дифференсиалии (1) меноманд. Ин хати каҷ ғайр аз ог-ей боз ҷойи геометрии нуқтаҳои махсуси хатҳои каҷи интегралиро дар бар мегирад.

Барои ёфтани ҳалли махсуси муодилаи дифференсиалии (1) зарур аст:

1) Ҳамаи шохаҳои $y = \psi(x)$ -е муайян карда шаванд, ки ба С дискриминанти хати каҷ дохил бошанд.

2) Аз байни шохаҳо онҳое интихоб карда шаванд, ки муодилаи дифференсиалии (1)-ро қаноат кунонанд.

Мисоли 3. Муодилаи дифференсиалии $y' = y^{2/3}$ -ро дида мебароем.

Ҳалли умумии ин муодила намуди зеринро дорад:

$$y = \Big(\frac{x-C}{3}\Big)^3$$

Муодилаи С - дискриминанти хати каҷро тартиб дода, системаро ҳосил мекунем:

$$y = \Big(\frac{x-C}{3}\Big)^3, \qquad \Big(\frac{x-C}{3}\Big)^2 = 0$$

Аз ин ҷо $y = 0$. Бевосита маълум аст, ки ин функсия муодилаи дифференсиалии додашударо қаноат мекунад ва ҳалли махсуси он мебошад. Қайд мекунем, ки аз ҳар як нуқтаи ҳалли махсуси $y = 0$ - беохир маҷмуи хатҳои каҷи интегралӣ мегузарад (расми 13). Масъалан аз нуқтаи O(0,0) чунин хатҳои каҷи интегралӣ мегузаранд:

а) хати рости $y = 0$. б) параболаи кубии $y = (\frac{x}{3})^3$. в) составные кривые mBAn, ки дар ин ҷо $y = (\frac{x+b}{3})^3$ ҳангоми $-\infty < x < -b$, $y = 0$ хангоми $-b \leq x \leq a$, $y = (\frac{x-a}{3})^3$ ҳангоми $a < x < +\infty$ (a, b - ададҳои ихтиерӣ).

расми 13

Мисоли 4. Бигузор $yy' = 1$ бошад, он гоҳ

$$\sqrt{y}y' = \pm 1$$

Муодилаи охиринро интегронида, ҳосил мекунем:

$$y^{3/2} = \pm\frac{3}{2}(x - C) \quad \text{ё} \qquad y^3 = \left(\frac{3}{2}(x - C)\right)^2$$

C -дискриминанти хати каҷ намуди зеринро дорад:

$$y^3 = \left(\frac{3}{2}(x - C)\right)^2, \qquad 0 = 3(x - C)$$

Аз ин ҷо $y = 0$ мешавад.

$y = 0$ -хати каҷи интегралиро ифода накарда, ҷойи геометрии нуқтаҳои махсуси параболаро ифода мекунад (расми 14).

Нуқтаҳои махсуси муодилахо муайян карда шаванд.

15.1. $y' = \frac{y}{x}$. 15.2. $y' = \frac{y-2x}{y}$. 15.3. $y' = \frac{x-4y}{2y-3x}$. 15.4. $y' = \frac{2x-y}{x-y}$.

15.5. $y' = \frac{x-2y}{3x-4y}$. 15.6. $y' = \frac{4x-y}{3x-2y}$. 15.7. $y' = \frac{2x-y-x^2}{x-2y+xy}$.

15.8. $y' = \frac{4y-2x}{x+y}$. 15.9. $y' = \frac{x+4y}{2x+3y}$.