Лексия 8. Муодилаи Бернулли.

Муодилаи Бернулли яке аз муодилаҳое мебошад, ки ба муодилаи хаттӣ оварда мешавад.

Намуди умумии муодилаи Бернулли чунин аст:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Дар ин муодила $P(x)$ ва $Q(x)$ функсияҳои маълуми дар ягон интервали (a,b) бефосила буда, n -адади доимӣ мебошад.

Агар $n = 0$ бошад, муодилаи Бернулли ба муодилаи хаттии ғайриякҷинса ва агар $n = 1$ бошад, муодилаи Бернулли ба муодилаи хаттии якҷинсаи

$$\frac{dy}{dx} + \Big(P(x) - Q(x)\Big)y = 0$$

табдил меёбад. Бинобар ин фарз карда мешавад, ки $n \neq 0; 1$ мебошад.

Барои ҳал кардани муодилаи Бернулли ҳар ду қисми онро ба y^n тақсим мекунем

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$$

Гузориши $z = y^{-n+1}$ ин муодиларо ба муодилаи хаттӣ меоварад.

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед.

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$$

Ҳал. Ҳамаи аъзоҳои муодиларо ба y^3 тақсим мекунем:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y^3} + \frac{xy}{y^3} = \frac{x^3y^3}{y^3}$$

ё

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3$$

Функсияи нави $z = y^{-2}$ -ро дохил мекунем. Он гоҳ нисбат ба функсияи номаълуми нав z муодилаи зерин ҳосил мекунем.

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3$$

Ҳалли умумии ин муодилаи хаттиро дар шакли ҳосили зарби ду функсия u ва ϑ ҷустуҷӯ мекунем, ки яке аз онҳоро ихтиёрӣ интихоб кардан мумкин аст.

$$z = u\vartheta; \quad \frac{dz}{dx} = u\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{du}{dx}\vartheta$$

Ифодаҳои z ва $\frac{dz}{dx}$ -ро дар муодила мегузорем

$$u\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{du}{dx}\vartheta - 2xu\vartheta = -2x^2,$$

ё

$$u(\frac{d\vartheta}{dx} - 2x\vartheta) + \vartheta\frac{du}{dx} = -2x^2.$$

Функсияи ϑ -ро тавре интихоб мекунем, ки ифодаи дохили қавс ба сифр баробар шавад, яъне

$$\frac{d\vartheta}{dx} - 2x\vartheta = 0.$$

Аз ин ҷо

$$\frac{d\vartheta}{dx} = 2x\vartheta; \quad ln\vartheta = x^2 \quad \text{ё} \quad \vartheta = e^{x^2}$$

Он гоҳ барои муайян намудани функсияи u муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$e^{x^2}\frac{du}{dx} = -2x^2$$

Тағйирёбандаҳоро ҷудо мекунем:

Аз ин ҷо

$$du = 2e^{-x^2}dx$$

$$u = -2\int e^{-x^2}x^3dx + C$$

Интегрони аз рӯи ҳиссаҳоро татбиқ мекунем

$$u = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C, \quad z = u\vartheta = x^2 + 1 + Ce^{-x^2}$$

Ҳамин тариқ, ҳалли умумии муодилаи додашуда чунин аст.

$$y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{-x^2}$$

ё

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{-x^2}}}.$$

Мисоли 2. Муодилаи

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}} arctgx$$

интегронида шавад.

Ҳал. Муодилаи додашуда муодилаи Бернулли аст. Ҳалли онро дар намуди ҳосили зарби ду функсия $y = u\vartheta$ ҷустуҷӯ мекунем (методи Бернулли)

$$y = u\vartheta, \quad y' = u'\vartheta + u\vartheta'$$

Ифодаҳои y ва y' -ро дар муодила мегузорем:

$$u'\vartheta + u\vartheta' - \frac{2xu\vartheta}{1+x^2} = 4\frac{\sqrt{u\vartheta}}{\sqrt{1+x^2}} arctgx$$

ё

$$u'\vartheta + u\left(\vartheta' - \frac{2x\vartheta}{1+x^2}\right) = 4\frac{\sqrt{u\vartheta}}{\sqrt{1+x^2}} arctgx$$

Ифодаи $\vartheta' - \frac{2x\vartheta}{1+x^2}$ -ро баробари сифр мегирем, яъне

$$\vartheta' - \frac{2x\vartheta}{1+x^2} = 0$$

ё

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{2x\vartheta}{1+x^2}$$

Тағйирёбандаҳоро ҷудо намуда, меинтегронем:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$ln|\vartheta| = ln|1 + x^2|$$

ё

$$\vartheta = 1 + x^2$$

Акнун барои ёфтани u муодилаи зеринро ҳосил мекунем:

$$u'\vartheta = 4\frac{\sqrt{u\vartheta}}{\sqrt{1+x^2}}arctgx$$

ё

$$u' = \frac{4\sqrt{u}arctgx}{1+x^2}, \quad \text{чунки} \quad \vartheta = 1+x^2$$

дорем.

Тағйирёбандаҳоро ҷудо карда интегралҳои мувофиқро ҳисоб мекунем.

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2arctgx}{1+x^2}dx,$$

$$\sqrt{u} = arctg^2x + C$$

Ҳамин тариқ,

$$u = (arctgx + C)^2$$

ва

$$y = u\vartheta = (1+x^2)(arctgx + C)^2$$

ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед.

$$(x^2lny - x)y' = y$$

Ҳал. Муодилаи додашуда муодилаи Бернулли нисбат ба x мебошад. Дар ҳақиқат

$$x^2lny - x = yx' \quad \text{ё} \quad yx' + x = x^2lny \tag{$*$}$$

Муодилаи якҷинсаи мувофиқро ҳал мекунем.

$$yx' + x = 0$$

Ҳалли муодила $x = \frac{C}{y}$ мешавад.

Барои ёфтани ҳалли муодилаи $(*)$ методи вариатсияи доимии ихтиёриро татбиқ мекунем. Ҳалли умумии муодилаи $(*)$ -ро дар намуди зерин ҷустуҷӯ мекунем

$$x = \frac{C(y)}{y},$$

он гох,

$$x' = \frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2}$$

Ифодаҳ,ои x ва x' ба муодилаи$(*)$ гузошта ҳ,осил мекунем

$$C'(y) - \frac{C(y)}{y} + \frac{C(y)}{y} = \frac{[C(y)]^2}{y^2} lny$$

ё

$$C'(y) = \frac{[C(y)]^2 lny}{y^2}; \quad \frac{dC(y)}{dy} = \frac{[C(y)]^2 lny}{y^2}$$

Тағйирёбандаҳ,оро ҷ,удо мекунем

$$\frac{dC(y)}{[C(y)]^2} = \frac{lny}{y^2} dy$$

$$-\frac{1}{C(y)} = C - \frac{lny + 1}{y}; \quad C(y) = \frac{y}{lny + 1 - Cy}$$

Ба ҷ,ойи $C(y)$ дар $x = \frac{C(y)}{y}$ қ,иматашонро гузошта, интеграли умумии муодилаи додашударо ҳ,осил мекунем

$$x = \frac{\frac{y}{lny+1-Cy}}{y} = \frac{1}{lny + 1 - Cy}$$

ё

$$x = \frac{1}{lny + 1 - Cy}$$

Мисолҳ,о барои кори мустақ,илона

Муодилаҳ,оро ҳ,ал кунед

8.1. $y' + \frac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)sinx, \quad y(0) = 1.$ 8.2. $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0.$

8.3. $y' - 2ytgx + y^2 sin^2 x = 0.$ 8.4. $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0, \quad y(1) = 0.$

8.5. $xcos^2 xy' + 2ycos^2 x = 2x\sqrt{y}.$ 8.6. $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 \sqrt[3]{y^4}, \quad y(1) = 1.$

8.7. $x^3y^2y' + x^2y^3 = 1.$ 8.8. $y^2y' - xy^3 = x^3.$ 8.9. $xy' - y = x^2\sqrt{y}.$

8.10. $(xy + x^2y^3)y' = 1.$ 8.11. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{2\sqrt{y}}{x^2}.$ 8.12. $xy' + y = y^2 lnx$

8.13. $y' - tgy = e^x \frac{1}{cosy}.$ 8.14. $y'cosy + siny = x + 1.$