Лексия 7. Муодилаи хаттии тартиби якум. Усулҳои ҳалли муодилаи хаттӣ.

Муодилае, ки нисбат ба функсияи номаълум ва ҳосилаи он хаттӣ аст, муодилаи хаттии тартиби якум номида мешавад.

Намуди умумии муодилаи хаттии тартиби якум чунин аст:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \qquad (1)$$

Дар ин муодила функсияҳои $P(x)$ ва $Q(x)$ функсияҳои дар ягон интервали (a,b) додашуда мебошанд. $P(x)$ -коэффисиенти муодила ва $Q(x)$ узви озоди он номида мешавад.

Агар $Q(x) \equiv 0$ бошад, онгоҳ (1) чунин намуд пайдо мекунад

$$y' + P(x)y = 0 \qquad (2)$$

ки онро муодилаи хатти якҷинса меноманд. Агар дар (1) ва (2) коэффисиенти $P(x)$ якхела бошад, пас (2)-ро муодилаи хатти якҷинсаи ба (1) мувофиқ меноманд. Дар муодилаи (2) тағйирёбандаҳо ҷудо мешаванд ва ба осонидидан мумкин аст, ки ҳалли умумии чунин аст:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \qquad (3)$$

ки ин ҷо C доимии ихтиёрӣ мебошад.

Агар $Q(x) \neq 0$ бошад, онгоҳ (1) муодилаи хаттии гайриякҷинса номида мешавад.

Барои ҳал кардани муодилаи хаттии ғариякҷинсаи (1) методи вариатсияи доимии итхтиёриро истифода мебарем (методи Лагранж): Ин метод аз он иборат аст, ки аввал ҳалли умумии муодилаи хаттии якҷинсаи мувофиқи (2) яъне функсияи (3) -ро меёбем. Баъд дар баробарии (3) бузургии C-ро функсияи x ҳисоб мекунем. Ҳамин тариқ, ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаи (1) -ро дар намуди зерин ҷустуҷӯ мекунем:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \qquad (4),$$

ки ин ҷо $C(x)$ -функсияи номуайян мебошад. Барои ёфтани $C(x)$ функсияи (4)-ро ба муодилаи (1) гузошта аз баробарии ҳосилшуда аввал $C'(x)$ ва баъд $C(x)$ -ро меёбем.

Барои ҳал кардани муодилаи хаттии (1) гузориши $y = u\vartheta$ -ро низ татбиқ кардан мумкин аст (методи Бернулли).

Мисоли 1. Муодиларо ҳал кунед.

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Ҳал. Методи вариатсияи доимиҳоро истифода кунем. Муодилаи якҷинсаи мувофиқро тартиб медиҳем

$$y' + 2xy = 0.$$

Ҳалли умумии ин муодилаи тағйирёбандаҳояш ҷудошаванда чунин аст:

$$y = Ce^{-x^2}.$$

Ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинсаро дар намуди

$$y = C(x)e^{-x^2} \tag{5}$$

ҷустуҷӯ мекунем, ки дар ин ҷо $C(x)$ -функсияи номаълуми тағйирёбандаи x мебошад. Функсияи (5)-ро дар муодилаи додашуда мегузорем

$$(C(x)e^{-x^2})' + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$$

Аз ин ҷо

$$C'(x) = 2x$$

ва ниҳоят бо ёрии интегронӣ $C(x)$ ёфта мешавад

$$C(x) = x^2 + C.$$

Ҳамин тариқ ҳалли умумии муодилаи ғайриякҷинса функсияи

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}$$

мебошад.

Мисолҳо барои кори мустақилона

Муодилаҳоро ҳал кунед

7.1. $y' + 3y = e^{-2x}$. 7.2. $y' - 3\frac{y}{x} = x$. 7.3. $\frac{dy}{dx} + 4y = x^2e^{-4x}, \quad y(0) = \frac{1}{3}$.

7.4. $y' - 2xy = e^{x^2}$. 7.5. $xy' = 2xlnx - y$. 7.6. $y' + yctgx - cosecx = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

7.7. $y' + xy + x = 0$. 7.8. $(y + e^x)dx - dy = 0$. 7.9. $y' - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$

7.10. $y'(1+x^2)-xy=\sqrt{1+x^2}$. 7.11. $y'+2py=e^{-2px}, \quad y(0)=0.$

7.12. $x\frac{dy}{dx}+y=cosx, \quad y(\pi)=\frac{1}{\pi}$. 7.13. $(1+e^x)yy'=e^x, \quad y(0)=0.$

7.14. $y'+(\frac{1}{2\sqrt{x}-1})y=e^{-\sqrt{x}}$. 7.15. $y'+3ytg3x=sin6x, \quad y(0)=\frac{1}{3}$.

7.16. $\frac{dy}{dx}-\frac{xy}{x^2+1}=x, \; y(2\sqrt{2})=3$. 7.17. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2, \; y(0)=1$

7.18. Маълум аст, ки дар ноқил байни қувваи ҷараёни i ва қувваи электроҳаракаткунандаи E, ки муқовимати R ва худиндуктивнокии L -ро дорад, вобастагии

$$E=Ri+L\frac{di}{dt} \quad (R,L-\text{доимиҳо})$$

ҷой дорад. Агар E -ро функсияи вақти t ҳисоб намоем, он гоҳ барои қувваи ҷараёни i муодилаи хаттии гайриякҷинсаро ҳосил мекунем

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}i(t)=\frac{E(t)}{L}.$$

Қувваи ҷараёни $i(t)$-ро ҳангоми $E=E_0=const$ ва $i(0)=I_0$ будан ҳисоб кунед.

7.19. Халли умумии муодилаи хаттии якҷинсаи тартиби якуми $y'+P(x)y=0$-ро ёбед, агар як ҳалли хусусии он $y_1(x)$ маълум бошад.

7.20. Халли умумии муодилаи хаттии ғайриякҷинсаи тартиби якум $y'+P(x)y=Q(x)$-ро ёбед, агар ду ҳалли хусусии он $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ маълум бошанд.