Лексия 3. Методи изоклинаҳо

Муодилаи

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

дар ҳар як нуқтаи $(x,y) \in D$, ки дар он функсияи $f(x,y)$ маъно дорад, қимати ҳосилаи y', яъне коэффисиенти кунҷии расанда ба хати каҷи интегралии муодилаи (1) дар нуқтаи $(x,y) -$.

Одатан барои сохтани хатҳои каҷи интегралии (ҳалҳои) муодилаи (1) методи изоклинаро истифода мебаранд.

Таъриф. *Ҷои геометрии нуқтаҳое, ки дар онҳо расандаҳо ба хати каҷи интегралии ҷусташаванда равиши яххела доранд, изоклина номида мешавад.*

Барои ёфтани изоклинаҳои муодилаи (1) қисми рости онро баробари ададии доимии k мегирем, яъне

$$f(x,y) = k \qquad (k - \text{параметр}) \qquad (2)$$

Аз ин ҷо маълум мешавад, ки миқдори изоклинаҳои ҳар як муодилаи намуди (1) бешумор мебошанд. Ба k қиматҳои ба ҳамдигар хеле наздикро дода, маҷмӯи зичи изоклинаҳоро месозем ва аз рӯи онҳо тақрибӣ хатҳои каҷи интегралии муодилаи (1)-ро гузаронидан мумкин аст. Барои боз ҳам аниқ сохтани хатҳои каҷи интегралӣ ёфтани хатҳои экстремум ва хатҳои нуқтаҳои хамшавӣ аҳамияти калон дорад.

Барои ҷои геометрии нуқтаҳои хамшавиро ёфтан y''-ро мувофиқи муодилаи (1) ҳисоб карда, онро баробари сифр гирифтан лозим аст, яъне

$$y'' = (y')' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y^{'} = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

Хате, ки бо муодилаи

$$\frac{\partial f}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

муайян карда мешавад, ҷои геометрии нуқтаҳои хамшавӣ (агар онҳо мавҷуд бошанд) номида мешавад.

Мисоли 1. Методи изоклинаро истифода бурда, хатҳои каҷи интегралии муодилаи $y' = 2x - y$ -ро созед.

Ҳал. Дар ин муодила $f(x,y) = 2x - y$. Бинобар ин муодилаи изоклинаҳо чунин аст:

$$2x - y = k \qquad \text{ё} \qquad y = 2x - k$$

Изоклинаҳо маҷмӯи хатҳои рости параллел мебошанд. Акнун ба k қимат дода моилии равишҳоро дар ҳар як нуқтаи изоклинаҳо муайян мекунем. Ҳангоми $k = 0$ изоклинаи $y = 2x$ -ро ҳосил мекунем. Ин хати рост ҳамвории xOy -ро ба ду қисм тақсим мекунад, ки дар ҳар яки онҳо ҳосилаи y' як хел аломат дорад (расми 5). Хатҳои каҷи интегралӣ, хати рости $y = 2x$ -ро бурида аз соҳаи камшавии функсияи y ба соҳаи афзуншавӣ мегузаранд ва баръакс. Ҳамин тариқ дар ин хати рост нуқтаи экстремуми хатҳои каҷи интегралӣ, аниқтараш нуқтаҳои минимум, ҷойгиранд.

Ҳангоми $k = -1$ ва $k = 1$ будан $y = 2x + 1$ ва $y = 2x - 1$ мешавад.

Расандаҳои ба хати каҷи интегралӣ дар нуқтаи буриш бо изоклинаҳои $y = 2x + 1$ ва $y = 2x - 1$ гузаронидашуда бо тири Ox мувофиқан кунҷҳои 135^0 ва 45^0 -ро ташкил медиҳанд.

Ҳосилаи тиртиби дуюмро меёбем. $y'' = 2 - y' = 2 - 2x + y$.

Хати рости $y = 2x - 2$, ки дар он $y'' = 0$ аст, изоклинаеро ифода мекунад, ки ҳангоми $k = 2$ будан ҳосил мегардад. Азбаски тарафи рости муодилаи додашуда, $f(x, y) = 2x - y$ шарти теоремаи мавҷудият ва ягонагиро дар тамоми ҳамвории xOy қаноат мекунад, пас хатҳои каҷи интегралии дигар ин изоклинаро намебуранд. Изоклинаи $y = 2x$, ки дар он нуқтаи минимуми хатҳои каҷи интегралӣ воқеъ мебошад, дар зери изоклинаи $y = 2x-2$ ҷойгир аст ва бинобар ин хатҳои каҷи интегралии поён аз изоклина $y = 2x - 2$ ҷойгиршуда нуқтаи экстремум надоранд.

Хати рости $y = 2x - 2$ ҳамвории xOy -ро ба ду қисм ҷудо мекунад, ки дар яке аз онҳо $y'' > 0$ ва ин онро мефаҳмонад, ки хатҳои каҷи интегралӣ ба поён барҷаста мебошанд ва дар дигаре $y'' < 0$, яъне хатҳои каҷи интегралӣ ба боло барҷастаанд. Хатҳои каҷи интегралӣ хати рости $y = 2x - 2$-ро намебуранд, яъне вай ҷойи геометрии нуқтаҳои хамиро ифода намекунад.

Хатҳои каҷи интегралии муодилаи додашуда нуқтаҳои хамиро надоранд.

расми 5

Мисоли 2. Методи изоклинаро истифода бурда, хатҳои каҷи интегралии муодилаи $y' = sin(x + y)$ -ро созед.

Ҳал. $y' = k$, $(k = const)$ гузошта муодилаи изоклинаҳо $sin(x+y) = k$-ро ҳосил мекунем. Ҳангоми $k = 0$ $sin(x + y) = 0$ мешавад. Аз ин ҷо

$$y = -x + \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{5}$$

Хатҳои каҷи интегралӣ дар нуқтаи буриш бо ин изоклинаҳо, расандаҳои горизонталиро доранд.

Муайян мекунем, ки хатҳои каҷи интегралӣ дар изоклинаи $y = -x + \pi n$ экстремум доранд ёне. Барои ин ҳосилаи тартиби дуюмро меёбем.

$$y'' = (1 + y')cos(x + y) = [1 + sin(x + y)]cos(x + y)$$

Ҳангоми $y = -x + \pi n$ ҳосил мекунем

$$y'' = (1 + sin\pi n)cos(\pi n) = cos\pi n = (-1)^n.$$

Агар n ҷуфт бошад, он гоҳ $y'' > 0$ ва аз ин ҷост, ки хатҳои каҷи интегралӣ дар нуқтаи буриш бо изоклинаи $y = -x + \pi n, \quad n = 0, \pm 2, \pm 4, ...,$ дорои минимум мебошанд. Агар n тоқ бошад, он гоҳ $y'' < 0$ ва хатҳои каҷи интегралӣ дар нуқтаи буриш бо изоклинаи $y = -x + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 3, ...,$ дорои максимум мебошад. Изоклинаҳои дигарро меёбем:

$$k = -1, \quad sin(x + y) = -1; \quad y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \tag{6}$$

$$k = 1, \quad sin(x + y) = 1; \quad y = -x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \tag{7}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Изоклинаҳо хатҳои рости параллелӣ бо коэффисиенти кунҷии -1 ифода мекунанд, яъне изоклинаҳо тири Ox -ро таҳти 135^0 мебуранд. Ба осонӣ боварӣ ҳосил намудан мумкин аст, ки изоклинаҳои $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, ...$, хатҳои каҷи интегралии муодилаи додашударо ифода мекунанд (барои ин кифоя аст, ки функсияи $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ -ро дар муодилаи $y' = sin(x + y)$ гузорем).

Дар ҳамаи нуқтаҳои ҳамвории xOy тарафи рости муодилаи додашуда, яъне функсияи $f(x, y) = sin(x + y)$ ҳамаи шартҳои теоремаи мавҷудият ва ягонагиро қаноат мекунад, бинобар ин хатҳои каҷи интегралӣ ҳамдигарро набурида изоклинаи $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ -ро низ намебуранд. Ҳангоми $1 + sin(x + y) = 0$ дар изоклинаҳои (6) ҳосилаи y'' ба сифр баробар мешавад ва дар изоклинаҳои (6) ва (7) бошад ҳангоми $cos(x + y) = 0$ y'' ба сифр баробар мешавад. Ҳангоми гузариш (аз чап ба рост) аз изоклинаҳои (7), y'' аломати мусбатро ба манфӣ иваз мекунад. Масъалан, агар нимтири дар байни изоклинаҳои $y = -x$ ва $y = -x + \pi$ маҳдудбударо гирем, он гоҳ дар изоклинаи $y = -x + \frac{\pi}{2}$ ҳосилаи $y'' = 0$ мешавад, илова бар ин $y'' > 0$. Ҳамин тариқ хатҳои каҷи интегралӣ ба поён барҷаста мебошанд ва дар изоклинаи $y'' < 0$ хатҳои каҷи интегралӣ ба боло барҷастаанд.

Ҳамин тариқ изоклинаҳои (7) ҷойи геометрии нуқтаҳои хамии хатҳои каҷи интегралиро ифода мекунанд.

Барои аниқтар сохтани хатҳои каҷи интегралӣ якчанд изоклинаҳои дигарро дида баромадан мумкин аст (расми 6).

расми 6

Қайд. Нуқтаҳои буриши ду ва ё зиёдтар изоклинаҳо нуқтаҳои махсуси муодилаи дифференсиалии (1) мебошанд, яъне чунин нуқтаҳое мебошанд, ки дар онҳо тарафи рости муодилаи (1) ба номуайянӣ мубаддал мегардад.

Муодилаи $y' = \frac{y}{x}$ -ро дида мебароем. Маҷмӯи изоклинаҳо аз рӯи муодилаи $\frac{y}{x} = k$ муайян карда мешаванд. Ин оилаи хатҳои рости аз ибтидои координатаҳо гузаранда мебошанд, ки дар ибтидои координатаҳо изоклинаҳо ҳамдигарро мебуранд. Ба осонӣ боварӣ ҳосил кардан мумкин аст, ки ҳалли умумии муодилаи додашуда $y = Cx$ мебошад ва нуқтаи (0,0) нуқтаи махсуси муодила мебошад. Дар ин ҷо изоклинаҳо хатҳои каҷи интегралии муодиларо ифода мекунанд (расми 7).

Мисоли 3. Методи изоклинаро истифода бурда хатҳои каҷи интегралии муодилаи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$$

-ро созед.

Ҳал. $y' = k, \quad k = const$ гузошта, маҷмӯи изоклинаҳои

$$\frac{y-x}{y+x} = k$$

-ро ҳосил мекунем. Ҳамин тариқ изоклинаҳо хатҳои ростеро ифода мекунанд, ки аз ибтидои координатаҳо O(0,0) мегузаранд.

Ҳангоми $k = -1$, изоклина $y = 0$, ҳангоми $k = 0$ изоклина $y = x$ ва ҳангоми $k = 1$, изоклина $x = 0$ мебошанд.

Муодилаи баръаксро дида мебароем

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y+x}{y-x}$$

Изоклинаи $y = -x$ -ро меебем, ки дар ҳамаи нуқтаҳояшон хатҳои каҷи интегралӣ расандаҳои вертикалиро доранд.

Дар нуқтаи (0,0) ҳамаи изоклинаҳои муодилаи додашуда ҳамдигарро мебуранд (нуқтаи махсуси муодила).

Бо ёрии изоклинаҳои ҳосилшуда хатҳои каҷи интегралиро месозем (расми 8). *расми 7* *расми 8*

Мисолҳо барои кори мустақилона

Методи изоклинаро истифода бурда, маҷмӯи хатҳои каҷи интегралии муодилаҳои дифференсиалиро созед.

3.1. $y' = x+1$, 3.2. $y' = x+y$, 3.3. $y' = y-x$, 3.4. $y' = \frac{1}{2}(x-2y+3)$

3.5. $y' = (y-1)^2$, 3.6. $y' = (y-1)x$, 3.7. $y' = \frac{y+1}{x-1}$, 3.8. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

3.9. $y' = \frac{x^2+y^2}{2} - 1$, 3.10. $xy' = 2y$, 3.11. $x^2 + y^2 y' = 1$, 3.12. $y' = \frac{y}{x+y}$

3.13. $(x^2+y^2)y' = 4x$, 3.14. $y' + y = (x-y')^3$, 3.15. $y' = x - e^y$