Лексия 2. Теоремаи мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коши

Масъалаи асосии назарияи интегронии муодилаҳои дифференсиалӣ ёфтани ҳамаи ҳалҳои муодила ва омӯхтани хосиятҳои онҳо мебошад. Аммо барои он ки ягон ҳалли муодиларо ёбем мо бояд пешакӣ боварӣ ҳосил кунем, ки муодилаи дифференсиалии додашуда ин гуна ҳалро дорад.

Теоремаи 1. *Бигузор муодилаи диффенсиалии $y^{'} = f(x,y)$ дода шуда бошад, ки дар ин ҷо $f(x,y)$ дар ягон соҳаи D-и ҳамвории xOy-и нуқтаи (x_0, y_0)-ро дарбаргиранда муайян бошад. Агар функсияи $f(x,y)$ шартҳои зеринро қаноат кунад:*

а) $f(x,y)$-функсияи дар соҳаи D бефосилаи тағйирёбандаҳои x ва y бошад;

б)$f(x,y)$-дар соҳаи D ҳосилаи хусусии бефосилаи $\frac{\partial f}{\partial y}$-ро дошта бошад,

он гоҳ интервали $(x_0 - h, x_0 + h)$ ёфт мешавад, ки дар он ҳалли ягонаи $y = \varphi(x)$-и мавҷуд аст, ки он шарти $y(x_0) = y_0$ -ро қаноат мекунад.

Теоремаи 1 шартҳои кофии мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъалаи Коширо барои муодилаи $y^{'} = f(x,y)$ таъмин мекунад, аммо ин шартҳо зарурӣ нестанд. Муодилаи $y^{'} = f(x,y)$ ҳалли ягона дошта метавонад, ки он шарти $y(x_0) = y_0$-ро қаноат мекунад, аммо дар нуқтаи (x_0, y_0) шарти а) ё б) ё ҳар дуи онҳо иҷро намешаванд.

Мисолҳои зеринро дида мебароем.

1. $y^{'} = \frac{1}{y^2}$ Дар ин ҷо $f(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$ Дар нуқтаи $(x_0, 0)$-и тири Ox шартҳои а) ва б) иҷро намешаванд (функсияи $f(x,y)$ ва ҳосилаи хусусии он $\frac{\partial f}{\partial y}$ дар тири Ox дорои каниши беохир мебошанд), аммо аз ҳар як нуқтаи $(x_0, 0)$ -и тири Ox ягона хати каҷи интегралии $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$ мегузарад (расми 2).

расми 1 *расми 2*

2. $y^{'} = xy + e^{-y}$. Тарафи рости муодила $f(x,y) = xy + e^{-y}$ ва ҳосилаи хусусии он $\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ дар тамоми нуқтаҳои ҳамвории xOy бефосила

мебошанд. Мувофиқи теоремаи мавҷудият ва ягонагӣ соҳае, ки дар он муодилаи додашуда ҳалли ягона дорад, тамоми ҳамвории xOy мебошад.

Агар дар теоремаи баёншуда фақат иҷрошавии шарти а) -ро талаб кунем, он гоҳ танҳо мавҷудияти ҳалро исбот кардан мумкин аст (теоремаи Пеано). Ягонагии ҳалро шарти б) таъмин мекунад. Қайд мекунем, ки ба ҷои шарти б) талаби сусттарро гузоштан мумкин аст, ки он шарти Липшитс ном дорад.

Мегӯянд, ки функсияи $f(x, y)$ дар соҳаи D-и ҳамвории xOy нисбат ба тағйирёбандаи y шарти Липшитсро қаноат мекунад, агар адади доимии мусбати L мавҷуд бошад, ки барои ҳар гуна ду нуқтаи (x, y_1), (x, y_2)- соҳаи D нобаробарии

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$$

иҷро шавад.

Адади $L > 0$-доимии Липшитс номида мешавад.

Мисол. Функсияи $f(x, y) \equiv |y|$ дар тамоми ҳамворӣ шарти Липшитсро қаноат мекунонад. Дар ҳақиқат

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = ||y_2| - |y_1|| \leq |y_2 - y_1|$$

Дар айни ҳол ин функсия дар хати рости $y = 0$ нисбат ба y ҳосила надорад.

Агар функсияи $f(x, y)$ дар тамоми соҳаи D бефосила бошад ва дар ин соҳа ҳосилаи хусусии бефосилаи $\frac{\partial f}{\partial y}$ дошта бошад, он гоҳ функсияи $f(x, y)$ дар ягон атрофи маҳками ҳар як нуқтаи ин соҳа шарти Липшитсро қаноат мекунад.

Қайди 1. *Агар $\frac{\partial f}{\partial y}$ маҳдуд бошад, пас барои функсияи $f(x, y)$ нисбат ба y шарти Липшитс иҷро мешавад.*

Қайди 2. *Аз иҷро шудани шарти Липшитс бо тағйирёбандаи y маҳдуд будани $\frac{\partial f}{\partial y}$ намебарояд.*

Масъалан, барои муодилаи $y' = 2|y|cosx$ функсияи $f(x, y) = 2|y|cosx$ нисбати y дар нуқтаи $(x_0, 0)$, $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, 1, ...$ дифференсиронидашаванда нест, аммо шарти Липшитс дар атрофи ин нуқтаҳо иҷро мешавад. Дар ҳақиқат

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |2|y_2|cosx - 2|y_1|cosx| = 2|cosx|||y_2| - |y_1|| \leq 2|y_2 - y_1|,$$

яъне шарти Липшитс бо доимии L=2 иҷро мешавад.

Бо ёрии шарти Липшитс теоремаи 1 ин тавр умумӣ кунонда мешавад.

Теоремаи 2. *Агар функсияи $f(x, y)$ дар соҳаи D бефосила буда дар ин соҳа нисбати y шарти Липшитсро қаноат кунад, он гоҳ масъалаи Коши*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y|_{x=x_0} = y_0, \quad (x_0, y_0) \in D$$

ҳалли ягона дорад.

Функсияи

$$y = \varphi(x, C), \tag{5}$$

ки дар ягон соҳаи D -и тағйиребии x ва C муайян буда, нисбат ба x ҳосилаи хусусии бефосила дорад, дар соҳаи D ҳалли умумии муодилаи (3) номида мешавад, агар баробарии (5) нисбат ба C дар D ҳалшаванда бошад:

$$C = \psi(x, y)$$

ва агар функсияи (5) барои ҳар гуна қимати C, ки бо баробарии

$$C = \psi(x, y), \quad (x, y) \in D$$

муайян карда мешавад, ҳалли муодилаи (3) бошад.

Формулаи ҳалли умумӣ имконият медиҳад, ки аз ҳисоби интихоби қиматҳои гуногуни C барои муодилаи (3) ҳалли ҳар гуна масъалаи Коширо ёбем. Барои ёфтани чунин ҳал дар формулаи (5) ба ҷои x ва y қиматҳои ибтидоии x_0 ва y_0 мегузорем:

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

Аз ин баробарӣ -ро меёбем.

$$C = \psi(x_0, y_0) \equiv C_0$$

Ин қимати $C = C_0$ -ро дар (5) гузошта ҳосил мекунем:

$$y = \varphi(x, C_0)$$

Ба ҳамин тариқ, мо ҳаллеро пайдо кардем, ки онро қиматҳои ибтидоии $x = x_0$, $y = y_0$ муайян мекунанд.

Ҳалле, ки дар ҳар як нуқтаи он масъалаи Коши ҳалли ягона дорад, ҳалли хусусии муодилаи (3) номида мешавад.

Ҳалле, ки дар ҳар як нуқтаи он ягонагии ҳалли масъалаи Коши вайрон мешавад, ҳалли махсуси муодилаи (3) номида мешавад.

Геометрӣ ин маънои онро дорад, ки ба ҳалли махсус хати каҷи интегралие мувофиқ меояд, ки аз ҳар як нуқтааш боз ақаллан як хати каҷи интегралии дигари муодилаи (3) мегузарад.

Мисоли 1. Нишон диҳед, ки функсияи $y = x + C$ ҳалли муодилаи дифференсиалии $y' = 1$ мебошад ва ҳалли хусусии онро ёбед, ки шарти ибтидоии $y|_{x=0} = 0$-ро қаноат кунонад. Маънои геометрии масъала муайян карда шавад.

Ҳал. Функсияи $y = x+C$ муодилаи додашударо барои ихтиёрӣ қиматҳои доимии C қаноат мекунад. Дар ҳақиқат $y^{'} = (x+C)' = 1$.

Шарти ибтидои ихтиёрии $y|_{x=x_0} = y_0$-ро дохил мекунем. $x = x_0$ ва $y = y_0$-ро дар баробарии $y = x+C$ гузошта ҳосил мекунем. $C = y_0 - x_0$ Қимати C -ро дар функсияи додашуда гузошта $y = x + y_0 - x_0$ пайдо мекунем. Ин функсия шартҳои ибтидоии додашударо қаноат мекунад, чунки ҳангоми $x = x_0$ будан $y = x_0+y_0-x_0 = y_0$ мешавад. Ҳамин тариқ, функсия $y = x+C$ ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Дар ҳолати хусусӣ $x_0 = 0$ ва $y_0 = 0$ гузошта ҳалли хусусии зерини муодиларо ҳосил мекунем:

$$y = x$$

.

Ҳалли умумии муодилаи додашуда, яъне функсияи $y = x+C$ дар ҳамвории xOy оилаи хатҳои рости параллелро бо коэффисиенти кунҷии $k = 1$ муайян мекунад. Аз ҳар як нуқтаи $M_0(x_0, y_0)$-и ҳамвории xOy ягона хати интегралии $y = x+y_0-x_0$ мегузарад. Ҳалли хусусии $y = x$ яке аз хатҳои каҷи интегралиро муайян мекунад, яъне хати росте мебошад, ки он аз ибтидои координатаҳо мегузарад (расми 3).

расми 3 *расми 4*

Дар анҷоми ин параграф мафҳуми муодилаи дар квадратура ҳалшавандаро муайян мекунем.

Мегӯянд, ки муодилаи дифференсиалӣ дар квадратура ҳалшаванда аст, агар ҳалли умумии (интеграли умумии) онро дар натиҷаи шумораи охирноки амалҳои элементарӣ бо функсияҳои маълум ва интегронии онҳо ҳосил кардан мумкин бошад.

Қайд мекунем, ки аксар муодилаҳои дифференсиалии тартиби якум, ки ҳангоми тадқиқи масъалаҳои фанҳои гуногуни табиатшиносӣ, техника ва ғ. пайдо мешаванд, дар квадратура ҳалшаванда нестанд. Ин гуна муодилаҳоро бо методҳои тақрибӣ ҳал мекунанд.

Аммо якчанд синфҳои муодилаҳои тартиби якуми дар квадратура ҳалшаванда мавҷуданд. Баъзе синфҳои муҳимтарини чунин муодилаҳоро мо дар параграфҳои минбаъда дида мебароем.

Мисоли 2. Нишон диҳед, ки функсияи $y = Ce^x$ ҳалли умумии муодилаи $y^{'} - y = 0$ мебошад ва ҳалли хусусии онро ёбед, ки шарти ибтидоии $y|_{x=1} = -1$-ро қаноат мекунад.

Ҳал. $y = Ce^x, \quad y^{'} = Ce^x$. Ифодаҳои y ва $y^{'}$-ро дар муодила гузошта, $Ce^x - Ce^x \equiv 0$ ҳосил мешавад, яъне функсияи $y = Ce^x$ муодилаи додашударо барои ихтиёрӣ қимати доимии C қаноат мекунад.

Шарти ибтидоии ихтиёрии $y|_{x=x_0} = y_0$-ро дохил мекунем. Дар функсияи $y = Ce^x$ ба ҷои x ва y мувофиқан x_0 ва y_0-ро гузошта $y_0 = Ce^{x_0}$-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $C = y_0e^{-x_0}$ мешавад. Функсияи $y = y_0e^{x-x_0}$ шарти ибтидоиро қаноат мекунад. Дар ҳақиқат, $x = x_0$ гузошта ҳосил мекунем $y = y_0e^{x_0-x_0} = y_0$. Функсияи $y = Ce^x$ ҳалли умумии муодилаи додашуда мебошад.

Ҳангоми $x_0 = 1$ ва $y_0 = -1$ ҳалли хусусии $y = -e^{x-1}$-ро ҳосил мекунем.

Геометрӣ ҳалли умумии муодила оилаи хатҳои каҷи интегралие мебошад, ки ҳар кадоми онҳо графики функсияи нишондиҳандагӣ мебошад. Ҳалли хусусии $y = -e^{x-1}$ хати каҷи интегралие мебошад, ки аз нуқтаи $M_0(1, -1)$ мегузарад (расми 4).

Мисолҳо барои кори мустақилона

2.1. Нишон диҳед, ки барои муодилаи $y' = |y|^{1/2}$ дар ҳар як нуқтаи тири Ox хосияти ягонагии ҳал вайрон мешавад.

2.2. Хати интегралии муодилаи $y' = sin(xy)$ -ро ёбед, ки аз нуқтаи O(0,0) мегузарад.