Лексия 1. Мафҳумҳои асосӣ ва таърифҳо доир ба муодилаҳои дифференсиалии оддӣ

Муодилаи дифференсиалӣ гуфта баробариеро меноманд, ки он тағйирёбандаҳои мустақил (аргументҳо), функсияи ҷусташаванда ва ҳосилаҳо ё - дифференсиалҳои онро дар бар мегирад.

Агар дар муодилаи дифференсиалӣ функсияи номаълум фақат аз як таг -йирёбандаи мустақил вобаста бошад, он гоҳ ин гуна муодиларо муодилаи дифференсиалии муқаррарӣ (оддӣ) меноманд. Масъалан

$$(x^2-y^2)dx-(x+y)dy=0, \quad \frac{dy}{dx}-yx=0, \quad y^{''}-2y^{'}-3y=cosx$$

муодилаҳои дифференсиалии муқаррарӣ мебошанд.

Агар функсияи номаълуми дар муодила дохилбуда аз ду ва ё зиёдтар тағйирёбандаҳои мустақил вобаста бошад, пас чунин муодиларо муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ меноманд.

Масалан муодилаҳои

$$\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ мебошанд.

Тартиби муодилаи дифференсиалӣ гуфта тартиби калонтарини ҳосила ё дифференсиалӣ дар муодила дохилбударо меноманд. Масалан муодилаи дифференсиалии $y^{'}+xy=e^x$ муодилаи диффференсиалии тартиби якум ва муодилаи $y^{''}+p(x)y=0$, ки дар ин ҷо $p(x)$- функсияи маълум мебошад, муодилаи дифференсиалии тартиби дуюм мебошад. Муодилаи дифференсиалии $y^{(7)}-xy^{''}=x^2$ муодилаи дифференсиалии тартиби ҳафтум аст.

Намуди умумии муодилаи дифференсиалии муқаррарии тартиби n -ум чунин аст.

$$F(x,y,y^{'},y^{''},....,y^{(n)})=0 \tag{1}$$

ки дар ин ҷо x-тағйирёбандаи мустақил ё аргумент, y -функсияи номаълуми ин тағйирёбанда, $y^{'},y^{''},.....,y^n$-ҳосилаҳои функсияи y нисбат ба x буда, F-функсияи додашудаи аргументҳои худ мебошад.

Функсияи n - маротиба дифференсиронидашавандаи $y=\varphi(x)$ дар интервали (a,b) ҳалли муодилаи (1) номида мешавад, агар хангоми иваз кардани y ба $\varphi(x)$, $y^{'}$ ба
$\varphi^{'}(x),..........,y^{(n)}$ ба $\varphi^{(n)}(x)$ айният ҳосил гардад, яъне

$$F\Big(x,\varphi(x),\varphi^{'}(x),......,\varphi^{n}(x)\Big)\equiv 0$$

Масалан функсияи $y = \frac{C}{cosx}$ $(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z)$, ки дар ин ҷо C- доимии ихтиёрӣ аст, ҳалли муодилаи дифференсиалии $y^{'} - ytgx = 0$ мебошад.

Дар ҳақиқат функсияи додашударо дифференсиронида ҳосил мекунем:

$$y^{'} = -\frac{C(-sinx)}{cos^2x} = \frac{Csinx}{cos^2x}$$

Ифодаҳои y ва $y^{'}$ -ро дар муодилаи дифференсиалӣ гузошта, мебинем, ки функсияи y барои ҳамаи қиматҳои C муодиларо қаноат мекунад.

$$\frac{Csinx}{cos^2x} - \frac{C}{cosx}tgx = 0,$$
$$\frac{Csinx}{cos^2x} - \frac{C}{cosx}\frac{sinx}{cosx} = 0,$$
$$\frac{Csinx}{cos^2x} - \frac{Csinx}{cos^2x} = 0.$$

Графики ҳалли муодилаи дифференсиалиро хати каҷи интегралӣ меноманд.

Намуди умумии муодилаи дифференсиалии тартиби якум чунин аст:

$$F(x, y, y^{'}) = 0. \tag{2}$$

Агар муодилаи (2) нисбат ба $y^{'}$ якимата ҳал шавад, он гоҳ муодилаи

$$y^{'} = f(x, y) \tag{3}$$

ҳосил мешавад, ки онро муодилаи дифференсиалии тартиби якуми нисбат ба ҳосила ҳалшуда меноманд.

Масъалаи Коши, ки яке аз масъалаҳои муҳимтарини назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ мебошад, барои муодилаи (3) ин тавр гузошта мешавад:

Аз байни ҳамаи ҳалҳои муодилаи (3) чунин ҳалли $y = \varphi(x)$ ҷудо карда шавад, ки он шарти ибтидоии

$$y = \varphi(x)|_{x=x_0} = \varphi(x_0) = y_0 \tag{4}$$

-ро қаноат кунонад.

Маънои геометрии масъалаи Коши аз он иборат аст, ки аз байни ҳамаи хатҳои каҷи интегралии муодилаи (3) чунин хати каҷи интегралие ҷудо карда шавад, ки он аз нуқтаи интихобкардаи $M_0(x_0, y_0)$-и ҳамвории xOy гузарад (расми 1).

Ҷараёни ёфтани ҳалҳои муодилаи дифференсиалиро интегронии ин муодила меноманд.

Қайд мекунем, ки муодилаи тартиби якуми нисбат ба ҳосила ҳалшударо дар шакли зерин низ навиштан мумкин аст.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (3')$$

(3) ва $(3')$ -ду шакли эквивалентии муодилаи номбаршуда мебошанд.

Мисолҳо барои кори мустақилона

Дар мисолҳои зерин нишон диҳед, ки функсияҳои додашуда ҳалли муодилаҳои нишондодашуда мебошанд.

1.1. $y = Ce^{-2x} + e^x, \quad y' + 2y = 3e^x$

1.2. $x = (C + y)e^{-y^2/2}, \qquad (e^{-y^2/2} - xy)dy - dx = 0$

1.3. $y = 2 + C\sqrt{1 - x^2}, \quad (1 - x^2)y' + xy = 2x,$

1.4. $y^3 = Cx^3 + x^4, \quad xy^2y' - y^3 = \frac{1}{3}x^4$

1.5. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - 2x + 1 + e^x, \quad y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$

1.6. $y = C_1 + C_2x + C_3x^3 + C_4cos2x + C_5sin2x + \frac{e^x}{5} + \frac{x^3}{24} + \frac{3xsin2x}{32},$
$y^{\mathrm{v}} + 4y''' = e^x + 3sin2x + 1$

1.7. $y = C_1 + C_2x^3 + C_3lnx, \quad x^2y''' = 2y'.$

1.8. $y(y - 2x)^3 = C(y - x)^2, \quad \frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}.$