Мавзӯъҳои 8 ва 9. Амалҳо бо ададҳои комплексӣ дар шакли тригонометрӣ. Формулаи Муавр.

Акнун амалҳоро бо ададҳои комплексӣ , ки дар шакли тригонометрӣ дода шудаанд, иҷро менамоем. Бигузор $\alpha_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ва $\alpha_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ бошад, он гоҳ

$$\alpha_1\alpha_2 = \left[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\right]\cdot\left[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right] =$$
$$= r_1 r_2\left[(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right] =$$
$$= r_1 r_2\left[(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2)\right] =$$
$$= r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right].$$

Методи индуксияи математикиро татбиқ намуда , барои зарбшавандаҳо низ меёбем:

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n = r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_n\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)\right].$$

Аз ин ҷо бе восита маълум мегардад, ки

$$\left|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n\right| = r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_n = \left|\alpha_1\right|\cdot\left|\alpha_2\right|\cdot\ldots\cdot\left|\alpha_n\right|$$

ва $\arg(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n) = \varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n = \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2 + \ldots + \arg\alpha_n$,

дар ҳолати $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$ будан пайдо мегардад:

$$\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

ё ки :

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Инро формулаи Муавр меноманд (ба номи математики франсавӣ А. Муавр (1667-1754)).

_Амали тақсимро иҷро менамоем:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) + i(-\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right].$$

Аз ин баробарӣ бевосита дида мешавад, ки

$$\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\left|\alpha_1\right|}{\left|\alpha_2\right|} \quad \text{ва} \quad \arg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg\alpha_1 - \arg\alpha_2.$$

Яъне, модули ҳосили тақсим ба ҳосили тақсими модули тақсимшаванда бар модули тақсимкунанда ва аргументи ҳосили тақсим ба фарқи аргументҳои тақсимшаванда ва таксимкунанда баробар мебошад.

Акнун нишон додан мумкин аст, ки формулаи Муавр барои дараҷаҳои бутуни манфӣ ҳам дуруст мебошад.

Дар ҳақиқат барои ададҳои $\alpha_1 = 1 = 1 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$ ва $\alpha_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ҳосил менамоем:

$$\alpha_1^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)}{r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}\left[\cos(0^0 - \varphi) + i\sin(0^0 - \varphi)\right] =$$
$$= r^{-1}\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right].$$

Акнун аз ин ҷо низ меёбем:

$$r^{-n} = \left(r^{-1}\right)^n = \left\{r^{-1}\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right]\right\}^n = \left(r^{-1}\right)^n\left[\cos n(-\varphi) + i\sin n(-\varphi)\right] =$$
$$= r^{-n}\left[\cos(-n)\varphi + i\sin(-n)\varphi\right].$$